【数学(解答)】

1

(1) 方程式 $2^{2x+2}-33\cdot 2^x+8=0$ の解は $x=\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$ である．ただし，$\boxed{\text{ア}}<\boxed{\text{イ}}$ とする．

(2) 2つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ において，$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$，$\vec{a}-\vec{b}$ と $2\vec{a}+\vec{b}$ が垂直であるとする．$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とするとき，$\cos\theta=\boxed{\text{ウ}}$ であり，$|\vec{a}+2\vec{b}|=\boxed{\text{エ}}$ である．

(3) 袋の中に赤玉が7個，白玉が3個入っている．袋の中から1個の玉を取り出し，その玉の色を確認してから袋の中に戻すものとする．この試行を3回繰り返したとき，3回とも同じ色の玉である確率は $\boxed{\text{オ}}$ であり，赤玉が2回，白玉が1回である確率は $\boxed{\text{カ}}$ である．

(4) 4で割ると1余り，7で割ると2余る3桁の自然数は $\boxed{\text{キ}}$ 個ある．

解説

(1) $4\cdot(2^x)^2-33\cdot 2^x+8=0 \iff (2^x-8)(4\cdot 2^x-1)=0 \iff 2^x=\dfrac{1}{4},\ 8$ より，

$x={}^{ア}\boxed{-2}$，${}^{イ}\boxed{3}$

(2) $(\vec{a}-\vec{b})\cdot(2\vec{a}+\vec{b})=0 \iff 2|\vec{a}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}-|\vec{b}|^2=0$

$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$ を代入して，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-1$ となるから，

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{-1}{2\cdot 3}={}^{ウ}\boxed{-\frac{1}{6}}$$

よって，$|\vec{a}+2\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2=36$ となり，

$|\vec{a}+2\vec{b}|={}^{エ}\boxed{6}$

(3) $$\left(\frac{7}{10}\right)^3+\left(\frac{3}{10}\right)^3={}^{オ}\boxed{\frac{37}{100}},\quad {}_3C_2\cdot\left(\frac{7}{10}\right)^2\cdot\frac{3}{10}={}^{カ}\boxed{\frac{441}{1000}}$$

(4) 4で割ると1余り，7で割ると2余る自然数の1つは9であるから，一般的には，

$9+4\cdot 7n=9+28n$

と表される．これが3桁の自然数になるのは，$n=4,\ 5,\ 6,\ \cdots,\ 35$ であるから，

その個数は $35-4+1={}^{キ}\boxed{32}$（個）

【講評】

1 いずれも基本的であり，全問を完答したい．

(1) 指数方程式を解く．

(2) ベクトルの基本的な計算．

(3) 反復試行の確率．

(4) 整数問題で，題意に合う式を立式する．

2 設定自体は簡単で問題の意味は分かりやすい．しかし，図形的な考察が必要であることや，計算量がやや多いことを考えると，取り組みにくい問題であったと思う．

尚，弧長が出題されたのは新課程になってから初めてである．

3 与えられた条件が何を表しているかが分からないと，(3)(4) が難しい．

条件がわからなくとも，(1)(2) は題意の通りに計算すれば，とりあえずの値は出る．

一次通過ラインは，一日目と同程度で70％が目安となるであろう．

2

xy 平面において原点Oを中心とする半径1の円を C とする．点 $(\cos\theta,\ \sin\theta)$ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$ における C の接線を l とし，l に関して点 $\mathrm{A}(1,\ 0)$ と対象な点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ とする．ただし，$\theta=0$ のとき，点Pは点Aとする．

(1) $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき，点Pの座標は $(\boxed{\text{ア}},\ \boxed{\text{イ}})$ である．

(2) 点Aと接線 l の距離を θ を用いて表すと $\boxed{\text{ウ}}$ である．

(3) x，y をそれぞれ θ を用いて表すと，$x=\boxed{\text{エ}}$，$y=\boxed{\text{オ}}$ である．x は $\theta=\boxed{\text{カ}}$ のとき，最大値 $\boxed{\text{キ}}$ をとり，y は $\theta=\boxed{\text{ク}}$ のとき，最大値 $\boxed{\text{ケ}}$ をとる．

(4) 点Pが描く曲線の長さは $\boxed{\text{コ}}$ である．

解説

接線 l の方程式は，$\cos\theta\cdot x+\sin\theta\cdot y=1$ …①

(1) $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき，① $\iff x+y=\sqrt{2}$ …②

線分APの中点 $\left(\dfrac{x+1}{2},\ \dfrac{y}{2}\right)$ が②を通るから，

$\dfrac{x+1}{2}+\dfrac{y}{2}=\sqrt{2} \iff x+y=2\sqrt{2}-1$ …③

AP⊥② より，直線APの傾き $\dfrac{y}{x-1}$ が1となるから，$y=x-1$ …④

③，④を解いて，Pの座標は $({}^{ア}\boxed{\sqrt{2}},\ {}^{イ}\boxed{\sqrt{2}-1})$

(2) 求める距離を d として，

$$d=\frac{|\cos\theta\cdot 1+\sin\theta\cdot 0-1|}{\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}}={}^{ウ}\boxed{1-\cos\theta}$$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ の同じ向きの単位ベクトルは $\vec{a}=(\cos\theta,\ \sin\theta)$ であるから，

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=2d\vec{a} \iff \overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2(1-\cos\theta)\vec{a}$

これより，$\mathrm{P}(x,\ y)$ を求めると，

$x={}^{エ}\boxed{1+2\cos\theta-2\cos^2\theta}$，$y={}^{オ}\boxed{2(1-\cos\theta)\sin\theta}$

$\dfrac{dx}{d\theta}=(2-4\cos\theta)\cdot(-\sin\theta)$ より，

x が最大となるとき $\cos\theta=\dfrac{1}{2} \iff \theta={}^{カ}\boxed{\dfrac{\pi}{3}}$ であり，x の最大値は ${}^{キ}\boxed{\dfrac{3}{2}}$

$\dfrac{dy}{d\theta}=2(1-\cos\theta)(1+2\cos\theta)$ より，

y が最大となるとき $\cos\theta=-\dfrac{1}{2} \iff \theta={}^{ク}\boxed{\dfrac{2}{3}\pi}$ であり，y の最大値は ${}^{ケ}\boxed{\dfrac{3\sqrt{3}}{2}}$

(4) $$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2=(2-4\cos\theta)^2\sin^2\theta+4(1-\cos\theta)^2(1+2\cos\theta)^2=8(1-\cos\theta)$$

よって，点Pが描く曲線の長さは，

$$\int_0^{\pi}\sqrt{8(1-\cos\theta)}\,d\theta=\int_0^{\pi}\sqrt{8\cdot 2\sin^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta=\int_0^{\pi}4\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta$$

$$=\left[-8\cos\frac{\theta}{2}\right]_0^{\pi}={}^{コ}\boxed{8}$$

3

整式 $f(x)$ は，次数が n であり

$f(0)=1^{n+1}$，$f(1)=2^{n+1}$，$\cdots$，$f(n)=(n+1)^{n+1}$

を満たしている．例えば，$n=1$ のとき $f(x)$ は1次式で $f(0)=1^2$ かつ $f(1)=2^2$ であるから，$f(x)=3x+1$ である．

(1) $n=2$ のとき $f(x)=\boxed{\text{ア}}$ であり，3次式 $(x+1)^3-f(x)$ を因数分解すると $\boxed{\text{イ}}$ である．

(2) $n=3$ のとき4次式 $(x+1)^4-f(x)$ を因数分解すると $\boxed{\text{ウ}}$ である．よって，$f(4)=\boxed{\text{エ}}$ であり，$f(x)$ の x^3 の係数は $\boxed{\text{オ}}$ である．

(3) n を用いて表すと $f(-1)=\boxed{\text{カ}}$ である．

(4) $a_n=\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{(x+1)^n}$ と定める．この数列の初項は $a_1=\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{3x+1}{x+1}=3$ であり，一般項は $a_n=\boxed{\text{キ}}$ である．

解説

$g(x)=(x+1)^{n+1}-f(x)$ とおくと

$g(0)=1^{n+1}-1^{n+1}=0$，$g(1)=2^{n+1}-2^{n+1}=0$，$\cdots$，$g(n)=(n+1)^{n+1}-(n+1)^{n+1}=0$

であるから，$g(x)$ は x，$x-1$，$x-2$，$\cdots$，$x-n$ を因数にもつ．よって

$g(x)=(x+1)^{n+1}-f(x)=Ax(x-1)(x-2)\cdot\cdots\cdot(x-n)$ … ①

$\therefore\ f(x)=(x+1)^{n+1}-Ax(x-1)(x-2)\cdot\cdots\cdot(x-n)=(1-A)x^{n+1}+\cdots$

題意より，$f(x)$ は次数が n であるから，$A=1$

これを①に代入すると

$g(x)=(x+1)^{n+1}-f(x)=x(x-1)(x-2)\cdot\cdots\cdot(x-n)$ … ②

$\therefore\ f(x)=(x+1)^{n+1}-x(x-1)(x-2)\cdot\cdots\cdot(x-n)$ … ③

(1) $n=2$ のとき，③で $n=2$ として，

$f(x)=(x+1)^3-x(x-1)(x-2)={}^{ア}\boxed{6x^2+x+1}$

また，②で $n=2$ として，$g(x)={}^{イ}\boxed{x(x-1)(x-2)}$

(2) $n=3$ のとき，②で $n=3$ として，$g(x)={}^{ウ}\boxed{x(x-1)(x-2)(x-3)}$

また，③で $n=3$，$x=4$ として，$f(x)=5^4-4!=625-24={}^{エ}\boxed{601}$

ここで，③で $n=3$ のとき

$f(x)=(x+1)^4-x(x-1)(x-2)(x-3)$

であるから，x^3 の係数に着目すると

${}_4C_1-(-1-2-3)=4+6={}^{オ}\boxed{10}$

(3) ③で $x=-1$ として，

$f(-1)=-(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)\cdot\cdots\cdot(-n-1)=-(-1)^{n+1}(n+1)!={}^{カ}\boxed{(-1)^n(n+1)!}$

(4) $f(x)$ の x^n の係数について考えると，③の展開式を考えることにより，

$${}_{n+1}C_1-(-1-2-3-\cdots-n)=n+1+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

とかける．$f(x)$ と $(x+1)^n$ はともに x の n 次式であるから，

最高次のみに着目すると

$$a_n=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{(x+1)^n}=\frac{\frac{(n+1)(n+2)}{2}x^n+\cdots}{x^n+\cdots}={}^{キ}\boxed{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}$$