YMS 2016年度 解答速報

大阪医科大学 前期

【数学（解答）】

1

(1)　変数 $u \geqq 1$，$v \geqq 1$ が関係式 $u+v=3$ をみたすとき，積 uv の値の範囲を示せ。

変数 $x \geqq 0$，$y \geqq 0$ が関係式 $\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}=3$ をみたすとする。$u=\sqrt{1+x^2}$，$v=\sqrt{1+y^2}$，$t=uv$ とおく。

(2)　xy を t の関数として表せ。

(3)　$(x+y)^2$ を t の関数として表せ。

(4)　$x+y$ の値の範囲を示せ。

(1)　$v=3-u$ より，$\begin{cases} u \geqq 1 \\ v \geqq 1 \end{cases} \iff 1 \leqq u \leqq 2$　…①

また，$uv=u(3-u)=-\left(u-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{9}{4}$

① より，$2 \leqq uv \leqq \dfrac{9}{4}$　…答

(2)　$\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}=3$ の両辺を 2 乗して，

$$2+x^2+y^2+2\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}=9 \iff x^2+y^2=7-2t$$

また，$t^2=u^2v^2=(1+x^2)(1+y^2)=1+x^2+y^2+(xy)^2$ であるから，

$$(xy)^2=t^2-1-(x^2+y^2)=t^2-1-(7-2t)=t^2+2t-8$$

$xy \geqq 0$ より，

$$xy=\sqrt{t^2+2t-8}\quad \cdots答$$

(3)　$(x+y)^2=x^2+y^2+2xy=7-2t+2\sqrt{t^2+2t-8}$　…答

(4)　$f(t)=7-2t+2\sqrt{t^2+2t-8}$ とおくと，

$$f'(t)=-2+\frac{2(t+1)}{\sqrt{t^2+2t-8}}=2\cdot\frac{t+1-\sqrt{t^2+2t-8}}{\sqrt{t^2+2t-8}}$$
$$=2\cdot\frac{(t+1)^2-(t^2+2t-8)}{\sqrt{t^2+2t-8}\left(t+1+\sqrt{t^2+2t-8}\right)}$$
$$=\frac{18}{\sqrt{t^2+2t-8}\left(t+1+\sqrt{t^2+2t-8}\right)}$$

(1) より，$2 \leqq t \leqq \dfrac{9}{4}$ であるから $f'(t)>0$ となり，$f(t)$ は単調に増加する．

よって，$f(2) \leqq (x+y)^2 \leqq f\left(\dfrac{9}{4}\right) \iff 3 \leqq (x+y)^2 \leqq 5$

$x+y \geqq 0$ より，$\sqrt{3} \leqq x+y \leqq \sqrt{5}$　…答

2

自然数 a，b に対して，その最大公約数を $G(a,\ b)$ とする。

(1)　$a>b$ のとき，$G(a,\ b)=G(a-b,\ b)$ を示せ。

自然数 n に対して　$(1+\sqrt{3})^n=p_n+q_n\sqrt{3}$ (p_n，q_n は自然数) とおく。

(2)　$G(p_{n+2},\ q_{n+2})$ と $G(p_n,\ q_n)$ の関係式を導け。

(3)　$G(p_n,\ q_n)$ の値を求めよ。

(1)　$G(a,\ b)=k$ とおくと，

$$\begin{cases} a=kA \\ b=kB \end{cases}$$

なる互いに素である自然数の組$(A,\ B)$ が存在し，

$$a-b=k(A-B)$$

により $a-b$ と b は公約数 k を持つことがわかる．

ここで，

$$\begin{cases} a-b=lA' \\ \quad b=lB' \end{cases}$$

なる $l>k$ を満たす整数 l および自然数の組$(A',\ B')$ が存在するとせよ，

$$a=l(A'+B')$$

により，a，b は k より大なる公約数 l をもつことになるが，これは k の最大性に反する．

以上により，題意の等式は成り立つ　…終

(2)　$(1+\sqrt{3})^{n+2}=(1+\sqrt{3})^2(1+\sqrt{3})^n=(4p_n+6q_n)+(2p_n+4q_n)\sqrt{3}$

により　$\begin{cases} p_{n+2}=4p_n+6q_n \\ q_{n+2}=2p_n+4q_n \end{cases}$

が成り立つ．(1) を用いると，

$$G(p_{n+2},\ q_{n+2})=G(4p_n+6q_n,\ 2p_n+4q_n)=G(2p_n+2q_n,\ 2p_n+4q_n)$$
$$=G(2p_n+2q_n,\ 2q_n)=G(2p_n,\ 2q_n)$$
$$=2\,G(p_n,\ q_n)\quad \cdots答$$

(3)　(2) により

$n=2k\ (k=1,\ 2,\ \cdots)$ のとき，$G(p_{2k},\ q_{2k})=2^{k-1}G(p_2,\ q_2)=2^{k-1}\cdot 2=2^k$

$n=2k-1\ (k=1,\ 2,\ \cdots)$ のとき，$G(p_{2k-1},\ q_{2k-1})=2^{k-1}G(p_1,\ q_1)=2^{k-1}\cdot 1=2^{k-1}$

以上まとめて，

n が偶数のとき $G(p_n,\ q_n)=2^{\frac{n}{2}}$，$n$ が奇数のとき $G(p_n,\ q_n)=2^{\frac{n-1}{2}}$ …答

3

e を自然対数の底として，$f(x)=e^x-2x^2$ とおく。$2<e<2\sqrt{2}$ および $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2}=\infty$ は既知とする。

(1)　$f'(x)$ を $f(x)$ の導関数とするとき，方程式 $f'(x)=0$ は 2 つの解をもつことを示せ。

(2)　方程式 $f'(x)=0$ の 2 つの解を a，$b\ (a<b)$ とするとき，$0<a<2<b$ を示せ。

(3)　方程式 $f(x)=0$ は 3 つの解を持つことを示せ。

(1)　$f'(x)=e^x-4x$，$f''(x)=e^x-4$ より，$f''(x)=0 \iff x=\log 4$

以下，$f'(\log 4)=4-4\log 4=4(1-2\log 2)$ の符号を判定する．

$\log_2 e<\log_2 2\sqrt{2}=\dfrac{3}{2}$ より，

$$\frac{\log e}{\log 2}<\frac{3}{2} \iff \log 2>\frac{2}{3}$$

よって，$f'(\log 4)=4(1-2\log 2)<4\left(1-2\cdot\dfrac{2}{3}\right)=-\dfrac{4}{3}<0$

更に，

$$\lim_{x\to-\infty}f'(x)=\infty,$$
$$\lim_{x\to\infty}f'(x)=\lim_{x\to\infty}x\left(\frac{e^x}{x^2}\cdot x-4\right)=\infty$$

x	$(-\infty)$	$\cdots$	$\log 4$	$\cdots$	(∞)
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$	(∞)	↘	負	↗	(∞)

であるから，方程式 $f'(x)=0$ は $x<\log 4$，$\log 4<x$ の範囲に 1 つずつ解を持ち，

合計 2 つの解を持つ．　…終

(2)　$f'(0)=1>0$，$f'(2)=e^2-8<(2\sqrt{2})^2-8=0$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f'(x)=\infty$ より，

方程式 $f'(x)=0$ の 2 解 a，$b\ (a<b)$ について，$0<a<2<b$ が成り立つ．　…終

(3)　a，b は方程式 $f'(x)=0$ の解であるから，$e^a=4a$，$e^b=4b$ が成り立つ．

よって，

$$f(a)=e^a-2a^2=4a-2a^2=2a(2-a)>0\quad (\because 0<a<2)$$
$$f(b)=e^b-2b^2=4b-2b^2=2b(2-b)<0\quad (\because 2<b)$$

更に，

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty,$$
$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}x^2\left(\frac{e^x}{x^2}-2\right)=\infty$$

x	$(-\infty)$	$\cdots$	a	$\cdots$	b	$\cdots$	(∞)
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$(-\infty)$	↗	正	↘	負	↗	(∞)

であるから，方程式 $f(x)=0$ は $x<a$，$a<x<b$，$b<x$ の範囲に 1 つずつ解を持ち，

合計 3 つの解をもつ．　…終

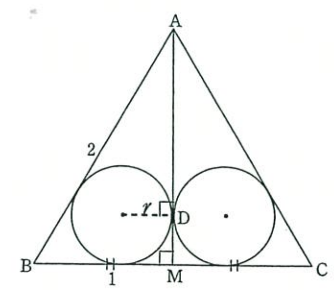
4

半径が等しい 2 つの円と一辺の長さ 2 の正三角形 ABC がある。2 つの円は互いに外接している。さらに一方の円は辺 AB と BC に接し，他方の円は CA と BC に接している。

(1)　これらの円の半径を求めよ。

(2)　2 つの円の周および内部を，三角形 ABC の A を通る中線の周りに回転させてできる立体の体積を求めよ。

図のように各点を設定する．



(1)　求める半径を r とおくと，AB=2，AM=$\sqrt{3}$，BM=1 であるから，

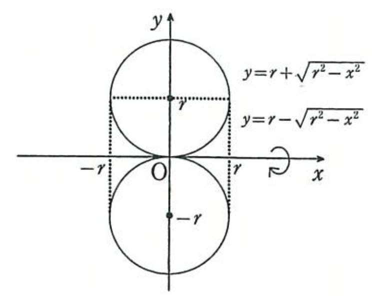
△ABM で面積について

$$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{3}=\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}+2)r$$

$$\therefore r=\frac{\sqrt{3}-1}{2}\quad \cdots答$$

(2)　直線 AM が x 軸，BC に平行で D を通る直線を y 軸となるように設定すると

$$\int_{-r}^{r}\pi\left(r+\sqrt{r^2-x^2}\right)^2dx-\int_{-r}^{r}\pi\left(r-\sqrt{r^2-x^2}\right)^2dx$$
$$=4\pi r\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx$$
$$=8\pi r\int_{0}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx$$
$$=8\pi r\cdot\pi r^2\times\frac{1}{4}$$
$$=2\pi^2r^3$$
$$=2\pi^2\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^3$$
$$=\frac{3\sqrt{3}-5}{2}\pi^2\quad \cdots答$$



$\boxed{5}$

1，2，3，4，5と記されたカードがそれぞれ2枚ずつ，合計10枚のカードがある。以下のゲームを行い，当たり，外れを決める。

10枚のカードをよく混ぜて，2枚引く。引いたカードの2数の合計をAとおく。$A \geqq 7$のときは外れ，$A=6$のときは当たりとする。$A \leqq 5$のときは，残りの8枚のカードの中から更に1枚を引き，3枚のカードの合計をBとする。$B \fallingdotseq 6$ならば外れ，$B=6$ならば当たりとする。

(1)　$A=6$である確率を求めよ。

(2)　このゲームで当たりとなる確率を求めよ。

取り方は全部で${}_{10}C_2=5\cdot 9$通りある.

(1)　最初に$\{1,\ 5\}$，$\{2,\ 4\}$，$\{3,\ 3\}$と取ればよいから

$$\frac{{}_2C_1\cdot{}_2C_1+{}_2C_1\cdot{}_2C_1+{}_2C_2}{{}_{10}C_2}=\frac{9}{5\cdot 9}=\frac{1}{5}\quad\cdots\text{答}$$

(2)　$B=6$となる場合を考える.

(i) $A=2$のとき，$\{1,\ 1\}$を取り，次に4を取ればよいから

$$\frac{{}_2C_2}{{}_{10}C_2}\times\frac{2}{8}=\frac{2}{5\cdot 9\cdot 8}$$

(ii) $A=3$のとき，$\{1,\ 2\}$を取り，次に3を取ればよいから

$$\frac{{}_2C_1\cdot{}_2C_1}{{}_{10}C_2}\times\frac{2}{8}=\frac{8}{5\cdot 9\cdot 8}$$

(iii) $A=4$のとき，$\{1,\ 3\}$を取り，次に2を取ればよいから

$$\frac{{}_2C_1\cdot{}_2C_1}{{}_{10}C_2}\times\frac{2}{8}=\frac{8}{5\cdot 9\cdot 8}$$

(iv) $A=5$のとき，$\{1,\ 4\}$を取り，次に1を取るか，
$\{2,\ 3\}$を取り，次に1を取ればよいから

$$\frac{{}_2C_1\cdot{}_2C_1}{{}_{10}C_2}\times\frac{1}{8}+\frac{{}_2C_1\cdot{}_2C_1}{{}_{10}C_2}\times\frac{2}{8}=\frac{4}{5\cdot 9\cdot 8}+\frac{8}{5\cdot 9\cdot 8}$$

以上(i)～(iv)より　$\dfrac{2+8+8+4+8}{5\cdot 9\cdot 8}=\dfrac{1}{12}$

(1)の場合と合わせて　$\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{12}=\dfrac{17}{60}$　…答

講評

$\boxed{1}$ (1) 1変数を消去する。その際、範囲に注意すればよい。(2) 与えられた式を2乗して整理すれば答えがでるが、答えが若干煩雑になる。(3) 微分するのが実践的だろう。置き換えして見やすくしてもよい。
$\boxed{2}$ (1) ユークリッドの互除法の証明。基本的だがとまどった人も多かろう。(2) 漸化式を立て、添え字の番号を下げたあと、(1)を適用させる。(3) nの偶奇で場合分けする。
$\boxed{3}$ (1) 2回微分すればよい。(2) $f'(0)$と$f'(2)$の符号を調べていく。(3) (2)の結果を用いて増減表を書けばよい。その際、極限を調べることを忘れないようにしよう。
$\boxed{4}$ (1) 面積を用いるなどいろいろな方法が考えられる。(2) 軸を設定して計算する。なお、答えを出すだけならパップス・ギュルタンの定理を用いることもできる。検算に利用するのもありだろう。
$\boxed{5}$ トランプのブラック・ジャックに似た設定。(1)(2)ともに書き出していくのが実践的だろう。きわめて基本的な問題である。

昨年に比べるとやさしめで、計算量も多くないが、$\boxed{1}$ $\boxed{2}$あたりは差がついたことだろう。全体で6割5分が目標となる。