YMS 2016年度 解答速報

杏林大学医学部【数学（解答）】

I

(1) $2^1=2$，$2^2=4$，$2^3=8$，$2^4=16$，$2^5=32$，$2^6=64=9\cdot 7+1$ より，

n の最小値は $n=6$ …答

よって，$2^{100}=(2^6)^{16}\cdot 2^4\equiv 1^{16}\cdot 16\equiv 7\ \ (mod\ 9)$ …答

(2) $x^{10}=\{(x+1)-1\}^{10}=\sum_{k=0}^{10}{}_{10}C_k(x+1)^k(-1)^{10-k}$ より，$(x+1)^3$ で割った余りは，

$$\sum_{k=0}^{2}{}_{10}C_k(x+1)^k(-1)^{10-k}={}_{10}C_0-{}_{10}C_1(x+1)+{}_{10}C_2(x+1)^2$$

$$=1-10(x+1)+45(x+1)^2=45x^2+80x+36 \quad \cdots答$$

(3) $1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=\dfrac{1\cdot(2^n-1)}{2-1}=2^n-1$ であるから，

100番目の項が第 n 群にあると仮定すると，

$2^{n-1}-1<100\leqq 2^n-1 \iff 2^{n-1}<101\leqq 2^n$

$2^6=64$，$2^7=128$ より $n=7$

また，第6群の末項は $2^6-1=63$（番目）にあるから，

100番目の項は第7群の $100-63=37$（番目）

∴ 第7群の第37項 …答

その値は，分母が 2^7，分子が100番目の奇数 $2\cdot 100-1=199$ であるから，

$$\frac{199}{2^7}=\frac{199}{128} \quad \cdots答$$

第7群の初項は64番目，末項は $2^7-1=127$（番目）であり，項数は 2^6

よって，第7群に含まれる項の総和は，

$$\frac{1}{2}\cdot 2^6\left(\frac{2\cdot 64-1}{2^7}+\frac{2\cdot 127-1}{2^7}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{127}{2}+\frac{253}{2}\right)=95 \quad \cdots答$$

同様に考えると，

$$a_n=\frac{2\cdot 2^{n-1}-1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}, \qquad b_n=\frac{2(2^n-1)-1}{2^n}=\frac{2\cdot 2^n-3}{2^n}=2-\frac{3}{2^n}$$

よって，$\lim_{n\to\infty}a_n=1$，$\lim_{n\to\infty}b_n=2$ …答

また，$S_n=\dfrac{1}{2}\cdot 2^{n-1}(a_n+b_n)$ であるから，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}(a_n+b_n)=\frac{1}{4}(1+2)=\frac{3}{4} \quad \cdots答$$

II

(a) $f(x)=2(2^{2x}+2^{-2x})-17k(2^x+2^{-x})+40k-7$

$=2\{(2^x+2^{-x})^2-2\}-17k(2^x+2^{-x})+40k-7$

$=2\{g(x)\}^2-17k\cdot g(x)+40k-11$

よって，$h(t)=2t^2-17kt+40k-11$ …答

また，$h(t)=k(40-17t)+2t^2-11$ と k について整理できるから，

k の値に依らず通る定点Pの y 座標は，

$$h\left(\frac{40}{17}\right)=2\cdot\left(\frac{40}{17}\right)^2-11=\frac{21}{289} \quad \cdots答$$

(b) $g(-x)=g(x)$ が成り立つから，$g(x)$ は偶関数である。

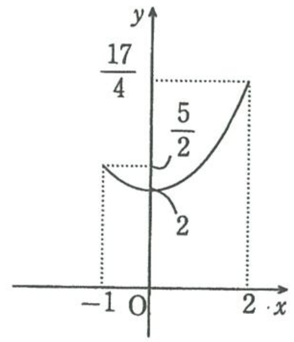
また，$g(x)=2^x+\dfrac{1}{2^x}$ より，

$$g'(x)=\left(1-\frac{1}{(2^x)^2}\right)\cdot(2^x)'=\left(1-\frac{1}{4^x}\right)\cdot 2^x\log 2=\frac{(4^x-1)\log 2}{2^x}$$

よって，$x\geqq 0$ において $g'(x)\geqq 0$ となり，この範囲で $g(x)$ は単調に増加する。

以上より，$y=g(x)\ (-1\leqq x\leqq 2)$ のグラフは右図のようになり，

$y=t$ のグラフとの共有点の個数は，



$$\begin{cases} 2<t\leqq\dfrac{5}{2} \text{ のときは2個} \\ t=2 \text{ または } \dfrac{5}{2}<t\leqq\dfrac{17}{4} \text{ のときは1個} \\ t<2 \text{ または } \dfrac{17}{4}<t \text{ のときは0個} \end{cases} \quad \cdots答$$

であり，$a=2$，$b=\dfrac{5}{2}$，$c=\dfrac{17}{4}$ …答

(c) $f(x)=0$ が異なる3つの実数解を持つための条件は，

$h(t)=0$ の解が，$2<t\leqq\dfrac{5}{2}$ の範囲で1個，$t=2$ または $\dfrac{5}{2}<t\leqq\dfrac{17}{4}$ の範囲で1個となる

場合である。

(i) $h(2)=0$ のとき，

$k=\dfrac{1}{2}$ となり，このとき $h(t)=2t^2-\dfrac{17}{2}t+9=(t-2)\left(2t-\dfrac{9}{2}\right)$

よって，$h(t)=0$ の2解は $t=2$，$\dfrac{9}{4}$ となり条件を満たす。

(ii) $h\left(\dfrac{5}{2}\right)=0$ のとき，

$k=\dfrac{3}{5}$ となり，このとき $h(t)=2t^2-\dfrac{51}{5}t+13=\left(t-\dfrac{5}{2}\right)\left(2t-\dfrac{26}{5}\right)$

よって，$h(t)=0$ の2解は $t=\dfrac{5}{2}$，$\dfrac{13}{5}$ となり条件を満たす。

(iii) (i), (ii) 以外のとき,

$$\begin{cases} h(2)>0 \\ h\left(\dfrac{5}{2}\right)<0 \\ h\left(\dfrac{17}{4}\right)\geqq 0 \end{cases} \text{ となればよいから, } \begin{cases} k>\dfrac{1}{2} \\ k>\dfrac{3}{5} \\ k\leqq\dfrac{67}{86} \end{cases} \iff \frac{3}{5}<k\leqq\frac{67}{86}$$

(i)〜(iii) より,

$$k=2 \text{ または } \frac{3}{5}\leqq k\leqq\frac{67}{86} \quad \cdots\text{答}$$

III

(1) (a) 2点 -1, $1+2i$ との距離が等しい点の集合であるから, ⓪ 直線 …答

(b) アポロニウスの円であるから, ② 円 …答

(c) $z=x+yi$ (x, y は実数) とおくと, $\dfrac{1}{2}(z+\overline{z})=\dfrac{1}{2}(x+yi+x-yi)=x$ より,

$$\sqrt{x^2+y^2}=1-x \iff \begin{cases} x^2+y^2=(1-x)^2 \\ 1-x\geqq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y^2=1-2x \\ x\leqq 1 \end{cases}$$

$y^2=1-2x$ のとき $x\leqq 1$ は常に成り立つから, ⑤ 放物線 …答

(2) $z=x+yi$ (x, y は実数) とおくと, (1) の (a) の直線の方程式は, $y=1-x$ …①

また,

$$|z|=\sqrt{k}|z-2| \iff |z|^2=k|z-2|^2$$
$$\iff x^2+y^2=k\{(x-2)^2+y^2\}$$
$$\iff (k-1)x^2+(k-1)y^2-4kx+4k=0 \quad \cdots②$$

ここで, $k=1$ と仮定すると, ② $\iff$ $x=1$ となり ① と接していないから, 以下 $k\neq 1$ としてよい。① を ② に代入して x について整理すると,

$$2(k-1)x^2-2(3k-1)x+5k-1=0 \quad \cdots③$$

この2次方程式が重解を持てばよいから,

$$(3k-1)^2-2(k-1)(5k-1)=0 \iff k^2-6k+1=0$$
$$\iff k=3\pm 2\sqrt{2} \quad \cdots\text{答}$$

$k=3+2\sqrt{2}$ のとき, ② の重解は

$$x=\frac{3k-1}{2(k-1)}=\frac{8+6\sqrt{2}}{2(2+2\sqrt{2})}=\frac{4+3\sqrt{2}}{2(1+\sqrt{2})}=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$$

また ① より, $y=1-x=1-\left(1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ であるから,

$$\alpha=1+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i \quad \cdots\text{答}$$

$k=3-2\sqrt{2}$ のときも同様に考えて, $\beta=1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$ であるから,

$$\alpha\overline{\beta}=\left(1+\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)\left(1-\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)=-\sqrt{2}\,i \quad \cdots\text{答}$$

(3) $\tan\theta=2$, $0<\theta<\pi$ より, $\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin\theta=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

直線 OB と直線 AB が直交するための条件は,

$$\frac{\gamma_1-\gamma_0}{\gamma_1-0}=\frac{w-1}{w}=\frac{w\overline{w}-\overline{w}}{w\overline{w}} \text{ が純虚数}$$
$$\iff w\overline{w}-\overline{w}=c^2-c(\cos\theta-i\sin\theta) \text{ が純虚数}$$
$$\iff c^2-c\cos\theta=0$$
$$\iff c=\cos\theta \quad (\because c>0)$$
$$\therefore c=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5} \quad \cdots\text{答}$$

$\triangle$OAB を考えて, $\mathrm{AB}=\mathrm{OA}\sin\theta=2\cdot\dfrac{2}{\sqrt{5}}=\dfrac{4}{5}\sqrt{5}$ …答

γ_n で表される点を P_n とすると, $\triangle\mathrm{OAB}\backsim\triangle\mathrm{OP}_{n-1}\mathrm{P}_n$ であるから,

$$|\gamma_n-\gamma_{n-1}|=\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n=\mathrm{OP}_n\tan\theta=2c^n\cdot 2=4c^n$$

よって,

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\gamma_n-\gamma_{n-1}|=\sum_{n=1}^{\infty}4c^n=\frac{4c}{1-c}=1+\sqrt{5} \quad \cdots\text{答}$$

IV

(a) $y=f(x)=3x^3+5x^2+ax+b$ 上の点 T$(t,\ f(t))$ における接線を $y=g(x)=mx+n$ とおく. いま, 接点の x 座標が $x=t$, 共有点が $x=s$ なので,

$$f(x)-g(x)=3(x-s)(x-t)^2 \quad \cdots\text{答}$$

と表せる. また, $f(x)-g(x)=3x^3+5x^2+(a-m)x+(b-n)$ となるので, x^2 の係数は 5 …答 であり, $f(x)-g(x)=0$ の解と係数の関係から

$$2t+s=-\frac{5}{3} \quad \cdots① \quad \cdots\text{答}$$

が成り立つ.

(b) $f'(x)=9x^2+10x+a$, $f''(x)=18x+10$ より, $f''(x)=0$ の解は $x=-\dfrac{5}{9}$

よって, 点 H の x 座標は $x=-\dfrac{5}{9}$ …答

① 式を変形すると, $\dfrac{2t+s}{1+2}=-\dfrac{5}{9}$ となることから, 線分 ST を 2:1 に内分する. …答

(c) 接点 T の x 座標を $x=-1$ とするとき, ① から $s=\dfrac{1}{3}$ である. …答

求める面積 S は

$$S=-3\int_t^s(x-s)(x-t)^2dx=\frac{64}{81} \quad \cdots\text{答}$$

また, 平均値の定理 (⑤) …答 から接線が存在する. 3次関数は変曲点対称であることを考慮すると,

$$\frac{t+u}{2}=-\frac{5}{9} \iff u=-\frac{10}{9}-t=-\frac{1}{9} \quad \cdots\text{答}$$

【数学（講評）】

例年通り大問 4 題，マークシート形式であった．例年に比べて計算量は減っているが，それでも分量が多いので 60 分ですべての問題を解ききるのは困難であろう．

Ⅰはどれも解ききりたい．(2) は手早く計算したい．
Ⅱは解の対応を丁寧に考える問題．(b) の誘導をうまく使いたい．(c) では等号が成り立つことが分かっているので，細かい吟味は省略したい．
Ⅲは (2) の計算が重たい．(3) は図形の問題．うまく計算したい．
Ⅳは変曲点対称であることなど，3 次関数の性質を知っていると計算が早い．ほぼ計算はいらないだろう．

Ⅲの複素数の問題は，冬期講習でほぼ同じ問題を扱っている．しっかり復習をしている人はすぐに流れがつかめただろう．

＜冬期講習会テキストより＞

演習 2

複素数平面上で $z_0=1+i$ が表す点を A_0 とし，z_0 と $\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{6}+\dfrac{i}{2}$ の積 $z_1=\alpha z_0$ が表す点を A_1 とする。以下，同様に $z_n=\alpha z_{n-1}$ $(n=2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ が表す点を A_n とするとき，$\triangle \mathrm{OA}_{n-1}\mathrm{A}_n$ の面積 S_n $(n\geqq 1)$ を求めよ。

また，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ を求めよ。ただし，O は原点である。