2016年度 YMS

東北医科薬科大学

解答速報

解答速報はYMS WEBにも掲載しています!

http://www.yms.ne.jp/

問題 [Ⅰ]

実数 t は $0 \leqq t \leqq 2\pi$ を動くとし，点 $\mathrm{P}(2\cos t,\ 4\sin t)$，点 $\mathrm{Q}(-2\sin t,\ 4\cos t)$，点 $\mathrm{A}\left(\dfrac{1-\sqrt{3}}{2},\ 1+\sqrt{3}\right)$ を考える．このとき，次の問に答えなさい．

(1) 原点を O とおくとき，$\mathrm{OP}^2+\mathrm{OQ}^2=\boxed{\text{アイ}}$ である．

(2) 点 P，A，Q が一直線に並ぶのは $t=\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}\pi$ のときである．

(3) 三角形 PAQ の面積は $S(t)=\boxed{\text{オ}}-\boxed{\text{カ}}\sin\left(t+\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}\pi\right)$ である．

また，$S(t)$ は $t=\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}\pi$ のとき最大値 $\boxed{\text{サ}}$ をとる．

解説

(1) $\mathrm{OP}^2+\mathrm{OQ}^2=4\cos^2 t+16\sin^2 t+4\sin^2 t+16\cos^2 t=20$ …答

(2) 3 点 P，A，Q が 1 直線上に並ぶとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OP}}+s\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$

とおけるので，

$$\begin{pmatrix}\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\\ 1+\sqrt{3}\end{pmatrix}=(1-s)\begin{pmatrix}2\cos t\\ 4\sin t\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-2\sin t\\ 4\cos t\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}1-\sqrt{3}=4\cos t-4s\cos t-4s\sin t\\ 1+\sqrt{3}=4\sin t-4s\sin t+4s\cos t\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow k=\frac{4\cos t-1+\sqrt{3}}{4(\cos t+\sin t)}=\frac{4\sin t-1-\sqrt{3}}{4(\sin t-\cos t)}$$

よって，

$$(4\cos t-1+\sqrt{3})(\sin t-\cos t)=(4\sin t-1-\sqrt{3})(\cos t+\sin t)$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(t+\frac{1}{6}\pi\right)=1$$

$0 \leqq t < 2\pi$ より，$t+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow t=\dfrac{1}{3}\pi$ …答

(3) $\triangle\mathrm{PAQ}=\dfrac{1}{2}\left|\left(2\cos t-\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right)\{4\cos t-(1+\sqrt{3})\}-\{4\sin t-(1+\sqrt{3})\}\left(-2\sin t-\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right)\right|$

$=4-4\sin\left(t+\dfrac{1}{6}\pi\right)$ …答

よって，$t+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{3}{2}\pi$，すなわち $t=\dfrac{4}{3}\pi$ のとき，最大値 8 である．…答

問題 [Ⅱ]

白玉 6 個と赤玉 3 個がはいっている袋から玉を 1 個取り出す試行を行う．このとき，次の問に答えなさい．

(1) 取り出した球は袋に戻さないとして，この試行を 5 回繰り返す．5 回目にはじめて赤玉が取り出される確率は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イウ}}}$ である．

(2) 取り出した球は袋に戻さないとして，この試行を 5 回繰り返す．このとき，赤玉がちょうど 3 個取り出される確率は $\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オカ}}}$ である．

(3) 取り出した球は袋に戻さないとして，この試行を 5 回繰り返す．5 回目に 3 個目の赤玉が取り出される確率は $\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{クケ}}}$ である．

(4) **取り出した球を袋に戻す**として，この試行を 5 回繰り返す．このとき，赤玉がちょうど 3 個取り出される確率は $\dfrac{\boxed{\text{コサ}}}{\boxed{\text{シスセ}}}$ である．

(5) **取り出した球を袋に戻す**として，この試行を繰り返す．赤玉が取り出されたら試行は止める．k 回目に赤玉が出て止める確率は $P_k=\dfrac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}\left(\dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}\right)^{\boxed{\text{テ}}}$ である．

また $T=1\cdot P_1+2\cdot P_2+\cdots+k\cdot P_k=\boxed{\text{ト}}-\left(\boxed{\text{ナ}}+k\right)\left(\dfrac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}\right)^{\boxed{\text{ネ}}}$ である．

解説

取り出した球を袋に戻さないとき，9 個の球すべてを取り出した状態を考えると，

全事象は，6 個の白玉と 3 個の赤玉を並べるので，$\dfrac{9!}{6!\cdot 3!}=84$ 通り．

(1) 前半 5 個の並べ方は$(WWWWR)$ であり，残り 4 個（W を 2 個，R を 2 個）並べればよいので，その並べ方が $\dfrac{4!}{2!\cdot 2!}=6$ 通り．よって

$$\frac{6}{84}=\frac{1}{14}\quad\text{…答}$$

(2) 前半 5 個に W が 2 個，R が 3 個並び，後半 4 個には $(WWWW)$ と並べばいいので，前半の並べ方を考えればよく，$\dfrac{5!}{2!\cdot 3!}=10$ 通り．よって

$$\frac{10}{84}=\frac{5}{42}\quad\text{…答}$$

(3) 5 回目に 3 個目の赤玉が出るので，前半 4 個は W が 2 個，R が 2 個であり，残り 5 つは $(RWWWW)$ と並ぶ．よってその並べ方は $\dfrac{4!}{2!\cdot 2!}=6$ 通り．よって

$$\frac{6}{84}=\frac{1}{14}\quad\text{…答}$$

(4) 反復試行の確率として考えればよく，

$${}_5C_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{40}{243}\quad\text{…答}$$

(5)
$$P_k=\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^k\quad\text{…答,}$$

また，

$$T=\sum_{m=1}^{k} m\cdot P_m=\sum_{m=1}^{k}\frac{m}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^m$$

ここで，$f(m)=-(m+2)\left(\dfrac{2}{3}\right)^{m-1}$ を利用して，恒等式

$$\frac{m}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^m=f(m+1)-f(m)$$

と書けるので，

$$T=\sum_{m=1}^{k}\{f(m+1)-f(m)\}=f(k+1)-f(1)$$

$$=3-(3+k)\left(\frac{2}{3}\right)^k\quad\text{…答}$$

問題 [Ⅲ]

$0 \leqq k \leqq \dfrac{\pi}{2}$ として，積分

$$S(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2|\sin x-\sin k|+|\cos x-\cos k|)dx$$

を考える．このとき，次の問いに答えなさい．

(1) $S(k)=\boxed{\text{アイ}}+\left(\boxed{\text{ウ}}+\boxed{\text{エオ}}-\pi\right)\sin k+\left(\boxed{\text{カ}}-\boxed{\text{キク}}+\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}\pi\right)\cos k$ である．

(2) $S'(k)=\left(\boxed{\text{サシ}}-\dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}\pi\right)\left(\sin k+\boxed{\text{ソ}}\cos k\right)$ である．

(3) $S(k)$ は $k=\dfrac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}\pi$ で最小値 $\boxed{\text{ツ}}\sqrt{\boxed{\text{テ}}}-\boxed{\text{ト}}$ をとる．

解説

(1) $0 \leqq x \leqq k$ のとき，$\sin x \leqq \sin k$，$\cos x \geqq \cos k$

$k \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\sin x \geqq \sin k$，$\cos x \leqq \cos k$

となるので，

$$f(x)=2(\sin k-\sin x)+(\cos x-\cos k)$$
$$F(x)=2(\sin k\cdot x+\cos x)+(\sin x-\cos k\cdot x)$$

とおくと，

$$S(k)=\int_0^k f(x)dx+\int_k^{\frac{\pi}{2}}\{-f(x)\}dx$$

$$=\Big[F(x)\Big]_0^k+\Big[-F(x)\Big]_k^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=2F(k)-F(0)-F\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=-3+(2+4k-\pi)\sin k+\left(4-2k+\frac{1}{2}\pi\right)\cos k\quad\text{…答}$$

(2)
$$S'(k)=\left(2k-\frac{1}{2}\pi\right)(\sin k+2\cos k)$$

(3) $0 \leqq k \leqq \dfrac{\pi}{2}$ となるので，$\sin k+2\cos k>0$ であり，$S'(k)=0$ のとき $k=\dfrac{\pi}{4}$

また，増減を調べると，このときに最小値をとり，

$$S\left(\frac{\pi}{4}\right)=3\sqrt{2}-3\quad\text{…答}$$

【講評】

1

(1) は素直に計算するだけである．(2) (3) はベクトルを用いて解くとよいだろう．

2

(1) ~ (3) は，全ての球を取り出して一列に並べると考えると明快．(4) は反復試行の確率計算である．(5) は等差と等比の混合数列だから，差を取って計算すればよい．

3

(1) は，絶対値の中身の正負で場合分けして計算するだけである．(2) は，(1) で得られた関数を微分するだけであり，(3) は，(2) で得られた結果をもとに増減を考えて最小値を求めるだけである．

総じて易しい．素直に計算するだけの問題を主として構成されている．ただし，計算の煩雑な問題が数問あり，それらを考慮すると，合格ラインは65~70%程度だと思われる．