YMS 2016年度 解答速報

東京慈恵会医科大学 【数学:解答・講評】

1

次の ☐ にあてはまる適切な数値を解答欄に記入せよ．

(1) 1から4までの番号をつけた4個の箱と，1から4までの番号をつけた4枚のカードがある．最初は，1，3番の箱に赤玉が1個ずつ，2，4番の箱に白玉が1個ずつ入っている．4枚のカードから同時に2枚を取り出し，取り出したカードの番号と同じ番号の2つの箱に入っている玉を入れかえた後，カードをもとに戻す．この試行を2回繰り返すとき，1，3番の箱に赤玉，2，4番の箱に白玉が入っている確率は $\boxed{\text{ア}}$ であり，1，2番の箱に赤玉，3，4番の箱に白玉が入っている確率は $\boxed{\text{イ}}$ である．

(2) 複素数 $z=\cos\theta+i\sin\theta+\sqrt{3}(i\cos\theta-\sin\theta)$ において，θ が $0\leqq\theta\leqq\frac{2}{3}\pi$ の範囲を動くとき，$|\sqrt{2}z-1+i|$ の最大値は $\boxed{\text{ウ}}$ である．ただし，i は虚数単位とする．

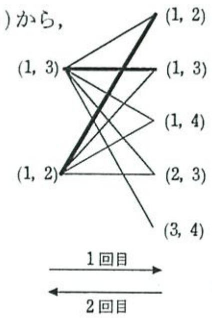
解説

(1) 赤玉が a，b 番の箱に入っている状態を $(a,\ b)$ で表すとする．

カードの取り出し方は ${}_4C_2=6$（通り）あり，このうち，a，b の2枚を取り出すときと，a，b 以外の2枚を取り出すときに限り，状態は $(a,\ b)$ のまま変わらない（確率は $\frac{2}{6}$）．

他の4通りについては，$(a,\ b)$ のうち一方の番号が他の番号に変わる（確率は各 $\frac{1}{6}$）．

状態の推移は右図のように表せる（太線の確率は $\frac{2}{6}$，他は各 $\frac{1}{6}$）から，



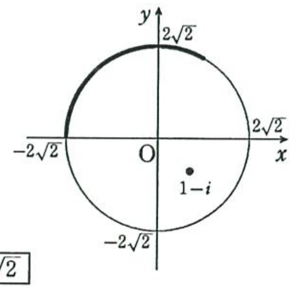
(ア) $\left(\frac{2}{6}\right)^2+\left(\frac{1}{6}\right)^2\times4={}^{ア}\boxed{\frac{2}{9}}$

(イ) $\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{6}\times2+\left(\frac{1}{6}\right)^2\times2={}^{イ}\boxed{\frac{1}{6}}$

(2) $|\sqrt{2}z-1+i|=|\sqrt{2}z-(1-i)|$ より，この式は，複素数平面上の2点 $\sqrt{2}z$ と $1-i$ の距離を表す．

$$\sqrt{2}z=\sqrt{2}\{\cos\theta+i\sin\theta+\sqrt{3}i(\cos\theta+i\sin\theta)\}$$
$$=\sqrt{2}(1+\sqrt{3}i)(\cos\theta+i\sin\theta)$$
$$=2\sqrt{2}\left\{\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\right\}$$

$0\leqq\theta\leqq\frac{2}{3}\pi \iff \frac{\pi}{3}\leqq\theta+\frac{\pi}{3}\leqq\pi$ より，$\sqrt{2}z$ は原点を中心とする半径 $2\sqrt{2}$ の円の一部（右図）を動く．



この中で $1-i$ から最も遠い点は，偏角が $\frac{3}{4}\pi$ の点であるから，最大値は $|1-i|+2\sqrt{2}=\sqrt{2}+2\sqrt{2}={}^{ウ}\boxed{3\sqrt{2}}$

2

xy 平面上において，半径2の円板が x 軸に接しながら正の方向にすべることなく回転するとき，円板上の定点Pが描く曲線 C_1 を考える．時刻 $t=0$ における円板の中心Dの位置を点 $(0,\ 2)$，Pの位置を点 $(0,\ 1)$ とする．時刻 t においてDが点 $(t,\ 2)$ の位置にあるように円板が回転していくとき，次の問いに答えよ．問い(1)(i)では ☐ にあてはまる適切な式を解答欄に記入せよ．

(1) (i) 時刻 t におけるPの座標 $(x,\ y)$ を t を用いて表すと，

$(x,\ y)=(\boxed{\text{エ}},\ \boxed{\text{オ}})$ である．

(ii) x，y の t に関する増減をそれぞれ調べよ．

(2) 時刻 t に対応する点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ における C_1 の法線 l が x 軸と交わる点をMとし，Mが線分PQの中点となるような l 上の点をQとおく．Qの座標を t を用いて表せ．ただし，$t=0$ のときはQを点 $(0,\ -1)$ とする．

(3) 点Qが描く曲線を C_2 とする．2曲線 C_1，C_2 と y 軸，および $t=3\pi$ のときの(2)における法線 l で囲まれた部分の面積 S を求めよ．

解説

(1)

(i) 時刻 $t=0$ における円板上の点 $\mathrm{E}(0,\ 0)$ を考える．また，時刻 t における円板と x 軸との接点をHとおく．時刻 t における $\angle\mathrm{EDH}=\theta$ とおくと，$\mathrm{OH}=\overset{\frown}{\mathrm{EH}}$ より

$t=2\theta$ $\quad\therefore\ \theta=\frac{t}{2}$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{DE}}$ の方向ベクトルは

$$\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}-\theta\right),\ \sin\left(-\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right)=\left(-\sin\frac{t}{2},\ -\cos\frac{t}{2}\right)$$

$\overrightarrow{\mathrm{DP}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{DE}}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{DE}}=(t,\ 0)+(0,\ 2)+\left(-\sin\frac{t}{2},\ -\cos\frac{t}{2}\right)$$

$$=\left(t-\sin\frac{t}{2},\ 2-\cos\frac{t}{2}\right)\qquad\therefore(x,\ y)=\left({}^{エ}\boxed{t-\sin\frac{t}{2}},\ {}^{オ}\boxed{2-\cos\frac{t}{2}}\right)$$

(ii) $\frac{dx}{dt}=1-\frac{1}{2}\cos\frac{t}{2}>0$ より，x は単調増加．

$\frac{dy}{dt}=\frac{1}{2}\sin\frac{t}{2}$ より，n を正の整数とすると，y の増減は

$4(n-1)\pi\leqq t\leqq2(2n-1)\pi$ で単調増加，$2(2n-1)\pi\leqq t\leqq4n\pi$ で単調減少．

(2) $$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{1}{2}\sin\frac{t}{2}}{1-\frac{1}{2}\cos\frac{t}{2}}=\frac{\sin\frac{t}{2}}{2-\cos\frac{t}{2}}$$ より

$$l:\ y=\frac{\cos\frac{t}{2}-2}{\sin\frac{t}{2}}\left\{x-\left(t-\sin\frac{t}{2}\right)\right\}+2-\cos\frac{t}{2}$$

$y=0$ とおくと，$\cos\frac{t}{2}-2\neq0$ より $\qquad x=t\qquad\therefore\ \mathrm{M}(t,\ 0)$

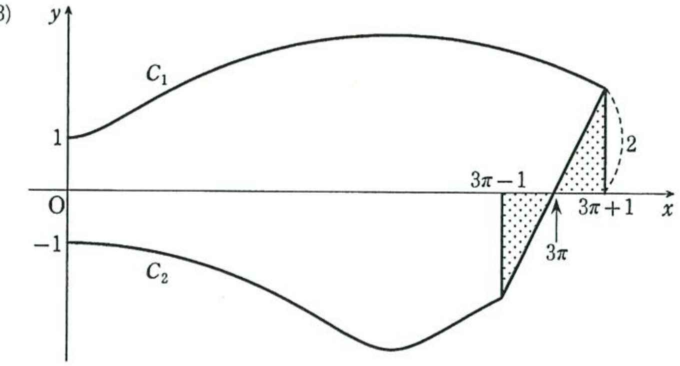
$\mathrm{Q}(X,\ Y)$ とおくと，題意より

$$\frac{t-\sin\frac{t}{2}+X}{2}=t\qquad\therefore\ X=t+\sin\frac{t}{2}$$

$$\frac{2-\cos\frac{t}{2}+Y}{2}=0\qquad\therefore\ Y=\cos\frac{t}{2}-2$$

以上から $\qquad \mathrm{Q}\left(t+\sin\frac{t}{2},\ \cos\frac{t}{2}-2\right)$

(3)



Qについて，$\frac{dx}{dt}=1+\frac{1}{2}\cos\frac{t}{2}>0$ であるから，上図打点部の面積が等しいことに着目すると，求める面積は

$$\int_0^{3\pi}\left(2-\cos\frac{t}{2}\right)\frac{dx}{dt}dt+\int_0^{3\pi}\left\{-\left(\cos\frac{t}{2}-2\right)\right\}\frac{dx}{dt}dt$$
$$=\int_0^{3\pi}\left(2-\cos\frac{t}{2}\right)\left(1-\frac{1}{2}\cos\frac{t}{2}\right)dt+\int_0^{3\pi}\left(2-\cos\frac{t}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\cos\frac{t}{2}\right)dt$$
$$=\int_0^{3\pi}\left(2-2\cos\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\cos^2\frac{t}{2}\right)dt+\int_0^{3\pi}\left(2-\frac{1}{2}\cos^2\frac{t}{2}\right)dt$$
$$=\int_0^{3\pi}\left(4-2\cos\frac{t}{2}\right)dt=\left[4t-4\sin\frac{t}{2}\right]_0^{3\pi}=12\pi+4$$

$\boxed{3}$

a を3以上の奇数の定数とする．方程式 $ax-2y=1$ をみたす自然数の組 $(x,\ y)$ について，次の問いに答えよ．

(1)　組 $(x,\ y)$ は無数に存在することを示せ．

(2)　組 $(x,\ y)$ の列 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$, $\cdots$, $(x_n,\ y_n)$, $\cdots$ が，条件「$n \geqq 2$ について x_n は，x_1, x_2, $\cdots$, x_{n-1} のどの項とも異なる」をみたすとする．このとき，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{y_1}{x_1}+\frac{y_2}{x_2}+\cdots+\frac{y_n}{x_n}\right)$ を a を用いて表せ．必要ならば，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{n}=0$ を利用してよい．

(解説)

(1)　$ax-2y=1$　…①の特殊解は，$(x,\ y)=\left(1,\ \dfrac{a-1}{2}\right)$ であるから，

$$① \iff a(x-1)=2\left(y-\frac{a-1}{2}\right)$$

奇数 a と2は互いに素であるから，

整数 N を用いて $x-1=2N$, $y-\dfrac{a-1}{2}=aN$ と表すことができ，

$$(x,\ y)=\left(2N+1,\ \frac{(2N+1)a-1}{2}\right)\quad\cdots②$$

x, y は自然数であるから，N は0以上の任意の整数をとることができる．

よって，①を満たす自然数の組 $(x,\ y)$ は無数に存在する．

(2)　$S_n=\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{y_1}{x_1}+\dfrac{y_2}{x_2}+\cdots+\dfrac{y_n}{x_n}\right)$ とする．

②において $\dfrac{y}{x}=\dfrac{a}{2}-\dfrac{1}{2(2N+1)}$ であるから，S_n の和の順序を並べ替えると，

$$S_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a}{2}-\frac{1}{2c_k}\right)=\frac{a}{2}-\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{c_k}\quad\cdots③$$

と表せる（ただし，c_1, c_2, $\cdots$, c_n は正の奇数で，$c_1<c_2<\cdots<c_n$ を満たす）．

このとき，$c_k \geqq (k$ 番目の正の奇数 $2k-1) \geqq k$ が成り立つから，

$$0<\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{c_k} \leqq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \leqq \frac{1}{n}\left(1+\int_1^n\frac{1}{x}dx\right)=\frac{1+\log n}{n}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1+\log n}{n}=0$ より，はさみうちの原理を用いて，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{c_k}=0$$

よって，③より，

$$(\text{与式})=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{2}-\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{c_k}\right)=\frac{a}{2}$$

$\boxed{4}$

正四面体 ABCD があり，三角形 ABD 上に $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{1}{8}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ をみたす点 P をとる．三角形 ACD の重心を G，直線 GP と平面 ABC の交点を Q とする．線分 AB 上の点 R を，三角形　PQR が PQ を斜辺とする直角三角形となるようにとるとき，線分 AR，AB の長さの比の値 $\dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{AB}}$ を求めよ．

(解説)

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$, $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{d}$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\dfrac{1}{3}\vec{c}+\dfrac{1}{3}\vec{d}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{GP}}=\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\frac{1}{8}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{d}-\left(\frac{1}{3}\vec{c}+\frac{1}{3}\vec{d}\right)=\frac{1}{8}\vec{b}-\frac{1}{3}\vec{c}-\frac{1}{12}\vec{d}$$

$\overrightarrow{\mathrm{GQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{GP}}=\dfrac{k}{8}\vec{b}-\dfrac{k}{3}\vec{c}-\dfrac{k}{12}\vec{d}$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\overrightarrow{\mathrm{AG}}+\overrightarrow{\mathrm{GQ}}=\frac{1}{3}\vec{c}+\frac{1}{3}\vec{d}+\frac{k}{8}\vec{b}-\frac{k}{3}\vec{c}-\frac{k}{12}\vec{d}=\frac{k}{8}\vec{b}+\frac{1}{3}(1-k)\vec{c}+\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4}k\right)\vec{d}$$

Q は平面 ABC 上にあるので

$$1-\frac{k}{4}=0\qquad \therefore k=4\qquad \therefore \overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{c}$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=l\vec{b}$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{RQ}}=\overrightarrow{\mathrm{AQ}}-\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{c}-l\vec{b}=\left(\frac{1}{2}-l\right)\vec{b}-\vec{c}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{RP}}=\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\frac{1}{8}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{d}-l\vec{b}=\left(\frac{1}{8}-l\right)\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{d}$$

ここで，正四面体の1辺の長さを1としても一般性は失われない．このとき

$$|\vec{b}|=|\vec{c}|=|\vec{d}|=1,\ \vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{d}=\vec{d}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}$$

である．題意より RQ⊥RP であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{RQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RP}}=\left\{\left(\frac{1}{2}-m\right)\vec{b}-\vec{c}\right\}\left\{\left(\frac{1}{8}-m\right)\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{d}\right\}=m^2-\frac{1}{4}m-\frac{1}{16}=0$$

$m>0$ より　　$m=\dfrac{1+\sqrt{5}}{8}$

以上から　　$\dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{AB}}=m=\dfrac{1+\sqrt{5}}{8}$

【講評】

$\boxed{1}$　小問集合であるが，他の大問がそれなりに難易度が高いことを考えると，差がつきやすい問題と言える．

(1)　確率．2回の試行によって，状態がどのように推移するかを考える．

(2)　複素数平面．円上の動点と定点との距離に帰着する．

$\boxed{2}$　積分法．円の回転角ではなく，中心 D の x 座標 t がパラメータとして与えられているので，注意が必要である．図を正確に描くことは難しいが，最終的に面積が計算できればよいので，図の正確さにこだわらず自信を持って進めていくことが重要である．できれば(2)までは解けると良い．

$\boxed{3}$　(1)は基本的であるが，(2)を解答できた者はほとんどいないであろう．(1)のみを解ければ良い．

$\boxed{4}$　問題文の意味は分かりやすいので，手をつけやすい問題である．空間ベクトルの問題は計算が煩雑になりやすいので，ある程度の時間をかけて計算ミスをしないように処理をしたい．

一次通過ラインは 60 % が目安となるであろう．