$\boxed{1}$

(1) 方程式 $\log_3 x+\log_3(3x-8)=1$ の解は $x=\boxed{ア}$ である．

(2) 複素数 $z$ が $|z|=3$ かつ $|z+4|=4$ を満たすとする．このとき，$z\bar{z}=\boxed{イ}$，$z+\bar{z}=\boxed{ウ}$ である．ただし，$\bar{z}$ は $z$ の共役複素数を表す．

(3) $x>0$ とする．このとき，$\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x+\frac{9}{x}\right)$ は $x=\boxed{エ}$ のとき，最小値 $\boxed{オ}$ をとる．

(4) $(x^2-x+1)^{20}$ を展開したとき，$x$ の係数は $\boxed{カ}$，$x^2$ の係数は $\boxed{キ}$ である．

(5) 数列 $\{a_n\}$ がすべての自然数 $n$ に対して $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=n^3$ を満たすとき，$a_3+a_6+a_9+\cdots+a_{3n}=\boxed{ク}$ となる．

解説

(1) 真数条件より　$x>0$ かつ $3x-8>0$　$\therefore x>\frac{8}{3}$

このもとで与式を変形すると，$\log_3 x(3x-8)=\log_3 3$ より

$x(3x-8)=3$　$\therefore x=^{ア}\boxed{3}$ $\left(\because x>\frac{8}{3}\right)$

(2) $|z|=3$ より　$|z|^2=z\bar{z}=^{イ}\boxed{9}$

$|z+4|=4$ より　$|z+4|^2=(z+4)(\bar{z}+4)=z\bar{z}+4(z+\bar{z})+16=16$

$z\bar{z}=9$ だから　$9+4(z+\bar{z})+16=16$　$\therefore z+\bar{z}=^{ウ}\boxed{-\frac{9}{4}}$

(3) $\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x+\frac{9}{x}\right)=x^2+\frac{9}{x^2}+10\geqq 2\sqrt{x^2\cdot\frac{9}{x^2}}+10=^{オ}\boxed{16}$

等号成立条件は　$x^2=\frac{9}{x^2}$　$\therefore x=^{エ}\boxed{\sqrt{3}}$ $(\because x>0)$

(4) 展開式の一般項は

$\frac{20!}{p!q!r!}\cdot(x^2)^p\cdot(-x)^q\cdot 1^r=\frac{(-1)^q\cdot 20!}{p!q!r!}\cdot x^{2p+q}$

ただし，$p$，$q$，$r$ は $0\leqq p\leqq 20$，$0\leqq q\leqq 20$，$0\leqq r\leqq 20$，$p+q+r=20$ を満たす整数である．

$x$ の係数は，$2p+q=1$ より　$(p,\ q,\ r)=(0,\ 1,\ 19)$

$\therefore \frac{(-1)^1\cdot 20!}{0!1!19!}=^{カ}\boxed{-20}$

$x^2$ の係数は，$2p+q=2$ より　$(p,\ q,\ r)=(0,\ 2,\ 18)$，$(1,\ 0,\ 19)$

$\therefore \frac{(-1)^2\cdot 20!}{0!2!18!}+\frac{(-1)^0\cdot 20!}{1!0!19!}=190+20=^{キ}\boxed{210}$

(5) $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=n^3\ (n\geqq 1)$

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}=(n-1)^3\ (n\geqq 2)$

辺々引くと

$a_n=n^3-(n-1)^3=3n^2-3n+1$

これは $n=1$ のときも成立し

$a_{3k}=3\cdot(3k)^2-3\cdot 3k+1=27k^2-9k+1$

より

$a_3+a_6+a_9+\cdots+a_{3n}=\sum_{k=1}^{n}a_{3k}=\sum_{k=1}^{n}(27k^2-9k+1)$

$=27\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-9\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n$

$=^{ク}\boxed{9n^3+9n^2+n}$

$\boxed{2}$

(1) $\frac{1}{1+\tan^2 t}$ を $\cos t$ を用いて表すと $\boxed{ア}$ である．

(2) $\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx$ について，$x=\tan t$ とおいて置換積分法を用いると

$\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\boxed{イ}$ である．

(3) $\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\int_0^1\frac{(x)'}{1+x^2}dx$ と考え，部分積分法を用いると $\int_0^1\frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx=\boxed{ウ}$

である．これより $\int_0^1\frac{1}{(1+x^2)^2}dx=\boxed{エ}$ が得られる．

(4) 等式 $x(x+1)^2=(ax+b)(x^2+1)+cx+d$ が $x$ についての恒等式となるとき，定数 $a$，$b$，$c$，$d$ の値は $a=\boxed{オ}$，$b=\boxed{カ}$，$c=\boxed{キ}$，$d=\boxed{ク}$ である．よって，

$$\int_0^1\frac{x(1+x)^2}{(1+x^2)^2}dx=\int_0^1\left\{\frac{ax+b}{1+x^2}+\frac{cx+d}{(1+x^2)^2}\right\}dx=\boxed{ケ}$$

である．

解説

(1) $1+\tan^2 t=\frac{1}{\cos^2 t}$ より　$\frac{1}{1+\tan^2 t}=^{ア}\boxed{\cos^2 t}$

(2) $x=\tan t$ とおくと　$dx=\frac{1}{\cos^2 t}$

| $x$ | $0\to 1$ |
|---|---|
| $t$ | $0\to\frac{\pi}{4}$ |

$\therefore \int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\tan^2 t}\cdot\frac{1}{\cos^2 t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}1dt=\left[t\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=^{イ}\boxed{\frac{\pi}{4}}$

(3) $\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\int_0^1(x)'\cdot\frac{1}{1+x^2}dx=\left[x\cdot\frac{1}{1+x^2}\right]_0^1-\int_0^1 x\cdot\frac{-2x}{(1+x^2)^2}dx$

$=\frac{1}{2}+2\int_0^1\frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx$

(2)の結果を用いると

$\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}+2\int_0^1\frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx$　$\therefore \int_0^1\frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx=^{ウ}\boxed{\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}}$

これより

$\int_0^1\frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx=\int_0^1\frac{(1+x^2)-1}{(1+x^2)^2}dx=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx-\int_0^1\frac{1}{(1+x^2)^2}dx$

であるから，$\boxed{イ}$ および $\boxed{ウ}$ の結果を用いて

$\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}=\frac{\pi}{4}-\int_0^1\frac{1}{(1+x^2)^2}dx$　$\therefore \int_0^1\frac{1}{(1+x^2)^2}dx=^{エ}\boxed{\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}}$

(4) 等式を展開すると

$x^3+2x^2+x=ax^3+bx^2+(a+c)x+b+d$

これが恒等式となるので

$a=1$，$b=2$，$a+c=1$，$b+d=0$

$\therefore a=^{オ}\boxed{1}$，$b=^{カ}\boxed{2}$，$c=^{キ}\boxed{0}$，$d=^{ク}\boxed{-2}$

よって，$x(x+1)^2=(x+2)(x^2+1)-2$ となるから，両辺を $(1+x^2)^2$ で割ると

$\frac{x(1+x)^2}{(1+x^2)^2}=\frac{x+2}{1+x^2}+\frac{-2}{(1+x^2)^2}=\frac{x}{1+x^2}+\frac{2}{1+x^2}-\frac{2}{(1+x^2)^2}$

(2)(3)の結果を用いて

$\int_0^1\frac{x(1+x)^2}{(1+x^2)^2}dx=\int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx+2\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx-2\int_0^1\frac{1}{(1+x^2)^2}dx$

$=\left[\frac{1}{2}\log(1+x^2)\right]_0^1+2\cdot\frac{\pi}{4}-2\left(\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}\right)$

$=^{ケ}\boxed{\frac{1}{2}\log 2+\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}}$

3

円周上に7つの点$A_0$，$A_1$，$A_2$，…，$A_6$がこの順番で時計回りに並んでいる．さいころを投げて出た目によって動点Pを動かすゲームをし，終了条件を満たせればゲームを終了する．ゲームが終了までにさいころを投げた回数をゲーム終了までの回数とする．最初，動点Pは$A_0$にあり，さいころを投げて出た目の数だけ時計回りに隣の点に移動する．例えば，さいころの目が5，3，6と出たらPは$A_0 \to A_5 \to A_1 \to A_0$と移動する．

(1) 終了条件を動点Pが再び$A_0$で止まるか，またはすでに止まったことがある点に再び止まった場合とする．ゲーム終了までの回数がちょうど2回である確率は，$\boxed{ア}$，ちょうど3回である確率は$\boxed{イ}$，ちょうど6回である確率は$\boxed{ウ}$である．

(2) 終了条件を動点Pが再び$A_0$で止まった場合とする．

(i) ゲーム終了までの回数がちょうど3回である確率は$\boxed{エ}$であり，3回以下である確率は$\boxed{オ}$，ゲーム終了までの回数がちょうど$n$回である確率は$\boxed{カ}$である．ただし$n \geqq 2$とする．

(ii) ゲーム終了までの回数が4回であり，動点Pが円周をちょうど2周回って終了するような移動の仕方は$\boxed{キ}$通りである．

(解説)

問題の条件から，さいころを1回振ると，等確率$\frac{1}{6}$で他の点のいずれかに移動する．

(1) (ア) 1回目はどの目が出てもよく，2回目で$A_0$に移動すればよいから，

$$1 \cdot \frac{1}{6} = {}^{ア}\boxed{\frac{1}{6}}$$

(イ) 1回目はどの目が出てもよく，2回目は$A_0$以外に移動し，3回目で$A_0$か1回目に止まった点に移動すればよいから，

$$1 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{2}{6} = {}^{イ}\boxed{\frac{5}{18}}$$

(ウ) 1回目はどの目が出てもよく，2～5回目はそれより前に止まったことがない点に移動し，6回目は5回目までの間に止まった点に移動すればよいから，

$$1 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{5}{6} = {}^{ウ}\boxed{\frac{25}{324}}$$

(2)(i)

(カ) 1回目はどの目が出てもよく，2～$(n-1)$回目は$A_0$以外に移動し，$n$回目は$A_0$に移動すればよい。求める確率を$p_n$として，

$$p_n = 1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} \cdot \frac{1}{6} = {}^{カ}\boxed{\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}}$$

(エ) $p_3 = {}^{エ}\boxed{\dfrac{5}{36}}$

(オ) $p_2 + p_3 = \dfrac{1}{6} + \dfrac{5}{36} = {}^{オ}\boxed{\dfrac{11}{36}}$

(ii)

(キ) 次の2つの場合があり，それぞれの場合の数は等しい。

(A) 初めの2回の目の和が7未満で，残りの2回の目の和が7より大きく，4回の目の和が14

(B) 初めの2回の目の和が7より大きく，残りの2回の目の和が7未満で，4回の目の和が14

2回の目の和が2，3，4，5，6，8，9，10，11，12となる場合の数はそれぞれ，

1，2，3，4，5，5，4，3，2，1（通り）

であるから，(A)の場合の数は，

$$1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 5 = 55 \text{（通り）}$$

よって，求める場合の数は，

$$55 \cdot 2 = {}^{キ}\boxed{110} \text{（通り）}$$

【講評】

1 いずれも基本的であり，全問を完答したい．

(1) 対数方程式を解く．

(2) 複素数の計算．

(3) 相加・相乗平均の関係を用いて，式の最小値を求める．

(4) 多項定理を用いて，係数を決定する．

(5) 数列の和から一般項を求め，他の和を求める．

2 定積分の計算．誘導が非常に親切で考えやすい．こちらも基本的な出題なので，完答に近い正答率が望ましい．

3 (1) (ア)，(イ)を解く過程で規則を掴むことで，(ウ)が解きやすくなる．

(2) (i)は簡単な等比数列になる．(ii)は初めの2回と残りの2回に分けて考えると数えやすい．

一次通過ラインは70％が目安となるであろう．