

問題 1, 2, 3 は、「マークシート解答用紙」に解答をマークしなさい。ただし、分数は既約分数で答え、平方根を含む解答は平方根の中をできるだけ簡単にして答えなさい。問題 4, 5 は、「数学記述式問題解答用紙」に解答しなさい。

- 1
- (1) $\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} + \frac{4}{\sqrt{5}-1}$ の整数部分を a 、小数部分を b とするとき、
 $a = \boxed{1} \boxed{2}$, $b = \boxed{3} \sqrt{\boxed{4}} + \sqrt{\boxed{5}} - \boxed{6}$ である。
- (2) k を定数とすると、 x の方程式 $kx^2 - (k+1)x + k = 0$ が異なる 2 つの実数解をもつための k の値の範囲は
 $-\frac{\boxed{7}}{\boxed{8}} < k < \boxed{9}$ または $\boxed{10} < k < \boxed{11}$ である。
- (3) 三角形 ABC は $AB=5$, $CA=2\sqrt{3}$, $\angle B=30^\circ$ を満たしている。このとき、
 $\sin C = \frac{\boxed{12} \sqrt{\boxed{13}}}{\boxed{14} \boxed{15}}$ であり、三角形 ABC の外接円の半径は $\boxed{16} \sqrt{\boxed{17}}$ である。
- (4) 青玉 2 個、白玉 3 個、赤玉 5 個の合計 10 個の玉が入っている袋から玉を 1 個取り出し、色を調べてもとに戻すことを 4 回続けて行うとき、4 回目に 2 度目の赤玉が出る確率は $\frac{\boxed{18}}{\boxed{19} \boxed{20}}$ である。

解説

(1) $\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} \cdot \frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} + \frac{4}{\sqrt{5}-1} \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1} = 4\sqrt{3} + \sqrt{5} + 8$
 $1.73 < \sqrt{3} < 1.74$, $2.23 < \sqrt{5} < 2.24$ より $17.15 < 4\sqrt{3} + \sqrt{5} + 8 < 17.2$
 よって $a = \boxed{17}$, $b = 4\sqrt{3} + \sqrt{5} + 8 - a = \boxed{4} \sqrt{\boxed{3}} + \sqrt{\boxed{5}} - \boxed{9}$

(2) $k=0$ のとき $x=0$ となり、解が 1 つだから不適。
 $k \neq 0$ のとき、 $kx^2 - (k+1)x + k = 0$ の判別式を D として
 $D = (k+1)^2 - 4k^2 = -3k^2 + 2k + 1 = -(3k+1)(k-1) > 0$
 $k \neq 0$ より $-\frac{\boxed{1}}{\boxed{3}} < k < \boxed{0}$ または $\boxed{0} < k < \boxed{1}$

(3) 正弦定理より、外接円の半径を R とすると $\frac{2\sqrt{3}}{\sin 30^\circ} = \frac{5}{\sin C} = 2R$
 $\therefore \sin C = \frac{\boxed{5} \sqrt{\boxed{3}}}{\boxed{14} \boxed{15}}$, $R = \boxed{16} \sqrt{\boxed{17}}$

(4) 赤玉 5 個、他の玉 5 個と考える。1~3 回目に赤玉 1 回と他の玉 2 回、4 回目に赤玉が出る場合だから
 ${}^3C_1 \left(\frac{5}{10}\right)^1 \left(\frac{5}{10}\right)^2 \times \frac{5}{10} = \frac{\boxed{18}}{\boxed{19} \boxed{20}}$

- 2
- (1) $x=1+2i$ が方程式 $x^3 + ax^2 - 9x + b = 0$ の解であるとする。ただし、 a, b は実数であり、 i は虚数単位とする。このとき、 $a = \boxed{21}$, $b = \boxed{22} \boxed{23}$ であり、この方程式の実数解は $x = -\boxed{24}$ である。
- (2) $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ とする。 $y = 3\sin^2\theta - 5\sin\theta \cos\theta - 2\cos^2\theta$ とおくと、 y の最大値は $\boxed{25}$ 、最小値は $\frac{\boxed{26} - \boxed{27} \sqrt{\boxed{28}}}{\boxed{29}}$ である。
- (3) 正数 x, y (ただし、 $x \neq 1, y \neq 1$) はつぎの 2 つの式を満たすとする。

$$\begin{cases} \log_x y + \log_y x = 2 \\ xy = 3^{126} \end{cases}$$
 このとき、 x は $\boxed{30} \boxed{31}$ 桁の数である。ただし、 $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。
- (4) 数列 $\{a_n\}$ を $a_1 = 3\sqrt{3}$, $a_{n+1}^3 = a_n$ ($n=1, 2, 3, \dots$) により定める。
 $S_n = \sum_{k=1}^n \log_3 a_k$ とおくと、 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{\boxed{32}}{\boxed{33}}$ である。

解説

(1) $x=1-2i$ も解だから、残りの解を α とすると、解と係数の関係より

$$\begin{cases} (1+2i) + (1-2i) + \alpha = -a \\ (1+2i)(1-2i) + (1+2i)\alpha + (1-2i)\alpha = -9 \\ (1+2i)(1-2i)\alpha = -b \end{cases} \therefore \begin{cases} 2 + \alpha = -a \\ 5 + 2\alpha = -9 \\ 5\alpha = -b \end{cases}$$
 これらを解くと $a = \boxed{21} \boxed{5}$, $b = \boxed{22} \boxed{3} \boxed{23} \boxed{5}$, $x = \alpha = -\boxed{24} \boxed{7}$

(2) $y = 3 \cdot \frac{1 - \cos 2\theta}{2} - 5 \cdot \frac{1}{2} \sin 2\theta - 2 \cdot \frac{1 + \cos 2\theta}{2} = -\frac{5}{2} \sin 2\theta - \frac{5}{2} \cos 2\theta + \frac{1}{2}$
 $= -\frac{5\sqrt{2}}{2} \sin\left(2\theta + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}$
 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ のとき $\frac{\pi}{4} \leq 2\theta + \frac{\pi}{4} \leq \frac{5}{4}\pi$ だから $-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \sin\left(2\theta + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$
 よって $\sin\left(2\theta + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき、最大値 $-\frac{5\sqrt{2}}{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2} = \boxed{25} \boxed{3}$
 $\sin\left(2\theta + \frac{\pi}{4}\right) = 1$ のとき、最小値 $-\frac{5\sqrt{2}}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} = \frac{\boxed{26} \boxed{1} - \boxed{27} \boxed{5} \sqrt{\boxed{28}} \boxed{2}}{\boxed{29}}$

(3) $\log_x y + \log_y x = \log_x y + \frac{1}{\log_x y} = 2$ より $(\log_x y - 1)^2 = 0 \therefore x = y$
 このとき、 $xy = x^2 = 3^{126}$ だから $x = 3^{63} \therefore \log_{10} x = 63 \log_{10} 3 = 30.0573$
 よって、 $10^{30} < x < 10^{31}$ となるので、 x は $\boxed{30} \boxed{3} \boxed{31} \boxed{1}$ 桁の数である。

(4) $a_1 = 3\sqrt{3}$, $a_{n+1}^3 = a_n$ ($n=1, 2, 3, \dots$) により定められる数列 $\{a_n\}$ は帰納的に正であるから、 $a_{n+1}^3 = a_n$ の両辺の 3 を底とする対数をとると
 $3 \log_3 a_{n+1} = \log_3 a_n \therefore \log_3 a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \log_3 a_1 = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$
 $0 < \frac{1}{3} < 1$ であるから $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{\frac{3}{2}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\boxed{32} \boxed{9}}{\boxed{33} \boxed{4}}$

- 3
- $AB=1, AC=\sqrt{2}, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}$ を満たす三角形 ABC の外接円の中心を O とする。
 以下の間に答えなさい。
- (1) $BC = \sqrt{\boxed{34}}$ であり、三角形 ABC の面積は $\frac{\boxed{35}}{\boxed{36}}$ である。
- (2) $\overrightarrow{AO} = \frac{\boxed{37}}{\boxed{38}} \overrightarrow{AB} + \frac{\boxed{39}}{\boxed{40}} \overrightarrow{AC}$ である。
- (3) 外接円 O 上に点 R を AR と BC が垂直になるように選ぶ。ただし、R は A とは異なるとする。このとき、
 $\overrightarrow{AR} = \frac{\boxed{41} \boxed{42}}{\boxed{43} \boxed{44}} \overrightarrow{AB} + \frac{\boxed{45}}{\boxed{46} \boxed{47}} \overrightarrow{AC}$
 であり、四角形 ABRC の面積は $\frac{\boxed{48}}{\boxed{49} \boxed{50}} \sqrt{\boxed{51}}$ である。

解説

(1) $|\overrightarrow{BC}|^2 = |\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{AC}|^2 - 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} + |\overrightarrow{AB}|^2 = 2 \therefore |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{\boxed{34}} \boxed{2}$
 また、三角形 ABC の面積を S とすると
 $S = \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2 |\overrightarrow{AC}|^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2} = \frac{\sqrt{\boxed{35} \boxed{7}}}{\boxed{36} \boxed{4}}$

(2) $\overrightarrow{AO} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ とおくと
 $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB} = x|\overrightarrow{AB}|^2 + y\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = x + \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}AB^2 = \frac{1}{2} \dots \textcircled{1}$
 $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AC} = x\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + y|\overrightarrow{AC}|^2 = \frac{1}{2}x + 2y = \frac{1}{2}AC^2 = 1 \dots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1} \textcircled{2}$ を連立すると、 $(x, y) = \left(\frac{\boxed{2}}{\boxed{7}}, \frac{\boxed{3}}{\boxed{7}}\right) \therefore \overrightarrow{AO} = \frac{\boxed{37} \boxed{2}}{\boxed{38} \boxed{7}} \overrightarrow{AB} + \frac{\boxed{39} \boxed{3}}{\boxed{40} \boxed{7}} \overrightarrow{AC}$

(3) A から BC に下ろした垂線の足を H とすると、面積について
 $S = \frac{1}{2} BC \cdot AH \therefore AH = \frac{S}{\frac{1}{2}BC} = \frac{\sqrt{\boxed{14}}}{4}$
 よって $BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \frac{\sqrt{\boxed{2}}}{4}$, $CH = BC - BH = \frac{3\sqrt{\boxed{2}}}{4}$
 $AR = nAH$ とおくと $RH = (n-1)AH$ だから、方べきの定理より
 $AH \cdot RH = BH \cdot CH \therefore AH \cdot (n-1)AH = BH \cdot CH$
 $AH = \frac{\sqrt{\boxed{14}}}{4}$, $BH = \frac{\sqrt{\boxed{2}}}{4}$, $CH = \frac{3\sqrt{\boxed{2}}}{4}$ を代入すると $n = \frac{\boxed{10}}{\boxed{7}}$ となり、
 $BH : CH = 3 : 1$ だから
 $\overrightarrow{AR} = n\overrightarrow{AH} = \frac{\boxed{10}}{\boxed{7}} \cdot \frac{3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{4} = \frac{\boxed{41} \boxed{1} \boxed{42} \boxed{5}}{\boxed{43} \boxed{1} \boxed{44} \boxed{4}} \overrightarrow{AB} + \frac{\boxed{45} \boxed{5}}{\boxed{46} \boxed{1} \boxed{47} \boxed{4}} \overrightarrow{AC}$
 また、 $|\overrightarrow{AR}| = |n\overrightarrow{AH}| = n|\overrightarrow{AH}| = \frac{5\sqrt{\boxed{14}}}{\boxed{14}}$ より
 (四角形 ABRC の面積) $= \frac{1}{2} BC \cdot AR = \frac{\boxed{48} \boxed{5}}{\boxed{49} \boxed{1} \boxed{50} \boxed{4}} \sqrt{\boxed{51} \boxed{7}}$

4

$k > 1$ とする. xy 平面上において, 連立不等式 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq y \leq k \cos x$ により定まる領域を R とする. R のうち $y \geq 1$ の部分の面積を S_1 , また $y \leq 1$ の部分の面積を S_2 とする. 以下の間に答えなさい.

(1) $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{kS_2}{S_1}$ を求めなさい.

(2) $k \cos x = 1$ の解を $x = t$ とするとき, $t = f(k)$ とおく. このとき, $S_2 - S_1$ を f を用いて k の関数として表しなさい. また, $S_2 - S_1$ の最大値を与える k の値とそのときの最大値を求めなさい.

解説

(1) $y = k \cos x$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) と $y = 1$ の交点の x 座標を t とする (これは (2) の t である).

このとき,

$$\cos t = \frac{1}{k} \quad \text{かつ} \quad 0 < t < \frac{\pi}{2} \quad \dots \textcircled{1}$$

また,

$$S_1 + S_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} k \cos x dx = k \quad \dots \textcircled{2}$$

$$S_1 = \int_0^t k \cos x dx - t \cdot 1 = k \sin t - t \quad \dots \textcircled{3}$$

②-③ より,

$$S_2 = k - k \sin t + t \quad \dots \textcircled{4}$$

① より,

$$\sin t = \frac{\sqrt{k^2 - 1}}{k} \quad \text{かつ} \quad k \rightarrow \infty \text{ のとき } t \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0$$

であるから,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_2 = \lim_{k \rightarrow \infty} (k - \sqrt{k^2 - 1} + t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{k + \sqrt{k^2 - 1}} + t \right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{S_1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{k \sin t - t} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{\sqrt{k^2 - 1} - t} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{k^2}} - \frac{t}{k}} = \frac{1}{1 - 0} = 1$$

$$\therefore \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{kS_2}{S_1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{k}{S_1} \cdot S_2 \right) = 1 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \quad \dots \textcircled{\ast}$$

(2) ④-③ より,

$$S_2 - S_1 = k - 2k \sin t + 2t = k - 2\sqrt{k^2 - 1} + 2f(k) \quad \dots \textcircled{\ast}$$

この式を $S(k)$ とすると,

$$S'(k) = 1 - \frac{2k}{\sqrt{k^2 - 1}} + 2f'(k) = 1 - \frac{2k}{\sqrt{k^2 - 1}} + 2 \cdot \frac{dt}{dk}$$

① より $k = \frac{1}{\cos t}$ であるから, 両辺を k で微分して,

$$1 = \frac{\sin t}{\cos^2 t} \cdot \frac{dt}{dk} \iff \frac{dt}{dk} = \frac{\cos^2 t}{\sin t}$$

よって,

$$S'(k) = 1 - \frac{2k}{\sqrt{k^2 - 1}} + \frac{2 \cos^2 t}{\sin t} = 1 - \frac{2k}{\sqrt{k^2 - 1}} + \frac{2}{\frac{k^2}{\sqrt{k^2 - 1}}}$$

$$= \frac{k - 2\sqrt{k^2 - 1}}{k} = \frac{k^2 - 4(k^2 - 1)}{k(k + 2\sqrt{k^2 - 1})} = \frac{(2 + \sqrt{3}k)(2 - \sqrt{3}k)}{k(k + 2\sqrt{k^2 - 1})}$$

$k > 1$ より, $S'(k) = 0 \iff k = \frac{2}{\sqrt{3}}$ であり, この前後で $S'(k)$ は正から負に変化する.

よって, $S_2 - S_1$ の最大値を与える k の値は,

$$k = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad \dots \textcircled{\ast}$$

また, そのときの最大値は,

$$S\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} - 2\sqrt{\frac{4}{3} - 1} + 2f\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = 2f\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$

ここで, $f\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ は $\frac{2}{\sqrt{3}} \cos x = 1 \iff \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ の解 $\frac{\pi}{6}$ であるから,

$$S\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = 2f\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = 2 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} \quad \dots \textcircled{\ast}$$

5

a は正の定数とする. 2つの曲線

$$y = \frac{a}{e} x^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$y = 2a \log_e x \quad \dots \textcircled{2}$$

を考える. ただし, e は自然対数の底である. 以下の間に答えなさい.

(1) 曲線 ① と曲線 ② はただ 1 つの点を共有し, かつその共有点において共通の接線 l をもつことを示し, l の方程式を求めなさい.

(2) (1) の l , 曲線 ① および y 軸で囲まれた図形を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を V_1 , また, (1) の l , 曲線 ② および x 軸で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積 V_2 をする. V_1 および V_2 を求めなさい. さらに $V_1 = V_2$ のときの a の値を求めなさい.

解説

(1) $f(x) = \frac{a}{e} x^2 - 2a \log x$ とおくと,

$$f'(x) = \frac{2a}{e} x - \frac{2a}{x} = \frac{2a(x^2 - e)}{ex} = \frac{2a(x + \sqrt{e})(x - \sqrt{e})}{ex}$$

$a > 0$ であり, x も ② の真数であるから正である.

よって, $f'(x) = 0 \iff x = \sqrt{e}$ であり,

$f(x)$ の増減表は右図のようになる.

これより, ① と ② は $x = \sqrt{e}$ においてのみ共有点をもつ.

また, ① において $y' = \frac{2a}{e} x$, ② において $y' = \frac{2a}{x}$ であり,

これらはともに $x = \sqrt{e}$ で $y' = \frac{2a}{\sqrt{e}}$ となるから, 接線の傾きも一致する.

以上のことから, ① と ② はただ 1 つの点を共有し, その共有点において共通の接線をもつことが示される.

また, その共通接線 l は,

$$y = \frac{2a}{\sqrt{e}}(x - \sqrt{e}) + \frac{a}{e}(\sqrt{e})^2 \iff y = \frac{2a}{\sqrt{e}}x - a \quad \dots \textcircled{3} \quad \dots \textcircled{\ast}$$

(2) パームクーヘン積分を用いて,

$$V_1 = \int_0^{\sqrt{e}} 2\pi x \left[\frac{a}{e} x^2 - \left(\frac{2a}{\sqrt{e}} x - a \right) \right] dx = \int_0^{\sqrt{e}} 2\pi \cdot \frac{a}{e} x(x - \sqrt{e})^2 dx$$

$$= \frac{2\pi a}{e} \cdot \frac{1}{12} (\sqrt{e} - 0)^4 = \frac{e\pi a}{6} \quad \dots \textcircled{\ast}$$

また, ②, ③ を x について解くと,

$$\textcircled{2} \iff x = e^{\frac{y}{2a}}, \quad \textcircled{3} \iff x = \frac{\sqrt{e}}{2a} y + \frac{\sqrt{e}}{2}$$

よって,

$$V_2 = \int_0^a 2\pi y \left[e^{\frac{y}{2a}} - \left(\frac{\sqrt{e}}{2a} y + \frac{\sqrt{e}}{2} \right) \right] dy$$

$t = \frac{y}{2a}$ と置換して,

$$V_2 = \int_0^{\frac{1}{2}} 2\pi \cdot 2at \left[e^t - \left(\sqrt{e} t + \frac{\sqrt{e}}{2} \right) \right] \cdot 2adt = 8\pi a^2 \int_0^{\frac{1}{2}} \left(te^t - \sqrt{e} t^2 - \frac{\sqrt{e}}{2} t \right) dt$$

$$= 8\pi a^2 \left[(t-1)e^t - \frac{\sqrt{e}}{3} t^3 - \frac{\sqrt{e}}{4} t^2 \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{(48 - 29\sqrt{e})\pi a^2}{6} \quad \dots \textcircled{\ast}$$

また, $V_1 = V_2$ のとき,

$$\frac{e\pi a}{6} = \frac{(48 - 29\sqrt{e})\pi a^2}{6} \iff a = \frac{e}{48 - 29\sqrt{e}} \quad \dots \textcircled{\ast}$$

【講評】

1 いずれも基本的であり, 全問を完答したい.

- (1) 有理化し, $\sqrt{3}$ と $\sqrt{5}$ を評価する.
- (2) $k=0$ のとき解が 1 つであることを注意し, 判別式を考える.
- (3) 正弦定理を用いるだけである.
- (4) 丁寧に場合分けする. 行う順序を区別して順列を考えるとよい.

2 こちらも基本的であり, 全問を完答したい.

- (1) 解 z が虚数解のとき, \bar{z} も解であることを利用し, 解と係数の関係を考える.
- (2) 半角の公式を用いた後, 三角関数の合成を行い 1 変数化する.
- (3) 連立して x を求めた後, 常用対数を考えて桁数を決定する.
- (4) $a_{n+1}^3 = a_n$ の両辺の 3 を底とする対数を取り, $\log_3 a_n$ の一般項を求めた後, 無限等比級数の和を考える.

3 これも, できれば完答したい. (3)ができるかどうかがかかれ目.

- (1) BC の長さは $|\overline{BC}|^3$ を考えると楽. 面積は公式を使えばよい.
- (2) 外心を求める問題は有名. 内積の成り立ちを考えるとよい.
- (3) 方べきの定理を使うとよい. これに気付かないと難しい.

4 1985 年東大理系に類題があり, 市販の問題集にも載っているが, 差がつくだろう.

- (1) 記述するのが難しい. 感覚的には $\frac{\pi}{2}$ とすぐに分かる.
- (2) 逆関数の微分法が, つまづくポイントだと思われる.

5 この記述問題も, 差がつくだろうと思われる.

- (1) しっかりと数式で証明できるかどうかがかかれ目だろう.
- (2) 計算が煩雑だが, 落ち着いて解けば取れる問題と思われる.

総合的に見ると, 昨年度よりも難化した. 大問 1~3 で点を取り, 大問 4 と 5 は部分点を狙うといったセットだろう.

一次通過ラインは, 60% と思われる.