YMS 2016年度 解答速報

昭和大学医学部 I期

解答速報はYMS WEBにも掲載しています！ http://www.yms.ne.jp/

【数学（解答）】

$\boxed{1}$ 次の各問に答えよ。ただし，(1)(2) については答は結果のみを解答欄に記入せよ。
また，10!，9! のような大きな数の階乗や累乗は，値を計算せずの a! や a^m のような表記でもよい。

(1) 中身が見えない袋の中に，1 個の赤玉と 9 個の白玉が入っている。この袋の中から玉を 1 つ取り出して色を確認し，またもとに戻すという試行を 10 回繰り返すとする。このとき，赤玉が 8 個出る確率を求めよ。

(2) 中身が見えない袋の中に，1 個の赤玉と $n-1$ 個の白玉が入っている。この袋の中から玉を 1 つ取り出して色を確認し，またもとに戻すという試行を n 回繰り返すとする。このとき，赤玉が 8 個出る確率を P_n とする。P_n を n の式で表せ。ただし，$n \geqq 8$ とする。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} P_n$ の値を求めよ。

(1) 赤球が 1 個，白球が 9 個あるので，1 回の試行でそれぞれの出る確率は $\dfrac{1}{10}$，$\dfrac{9}{10}$

よって，求める確率は

$$ {}_{10}C_8\left(\frac{1}{10}\right)^8\left(\frac{9}{10}\right)^2=\frac{9^3}{2\cdot 10^9} $$

(2) (1) と同様にして

$$ P_n={}_nC_8\left(\frac{1}{n}\right)^8\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-8}=\frac{n!\cdot(n-1)^{n-8}}{(n-8)!8!\cdot n^n}\left(=\frac{(n-2)!\cdot(n-1)^{n-7}}{(n-8)!8!\cdot n^{n-1}}\right) $$

(注) 十分に大きな数字は 8! などの形で残したが，約分についてはできるだけ簡単にした方が良いかもしれない.

(3)

$$ P_n=\frac{n!}{8!\cdot(n-8)!\cdot n^8}\cdot\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-8} $$

$$ =\frac{1}{8!}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)}{n^8}\cdot\left(1+\frac{1}{-n}\right)^{n-8} $$

$$ =\frac{1}{8!}\cdot 1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)\left(1-\frac{4}{n}\right)\left(1-\frac{5}{n}\right)\left(1-\frac{6}{n}\right)\left(1-\frac{7}{n}\right)\cdot\left\{\left(1+\frac{1}{-n}\right)^{-n}\right\}^{\frac{n-8}{-n}} $$

よって，

$$ \lim_{n\to\infty} p_n=\frac{1}{8!}\cdot 1\cdot e^{-1}=\frac{1}{8!\cdot e} $$

YMS直前講習　昭和 I テキストより

大的中！！

$\boxed{6}$ 数学 I・A 宿題

青球 6 個と赤球 n 個 $(n \geqq 2)$ が入っている袋から，3 個の球を同時に取り出すとき，青球が 1 個で赤球が 2 個である確率を P_n とする。

(1) P_n を n の式で表せ。　(2) $P_n > P_{n+1}$ を満たす最小の n を求めよ。

(3) P_n を最大にする n の値を求めよ。

$\boxed{2}$ 次の各問に答えよ。ただし，答は結果のみを解答欄に記入せよ。

(1) 空間のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ が与えられているとする。これらを用いて，次のようにベクトル $\vec{d}$，$\vec{e}$ を定義する。ここで，$\vec{a}\cdot\vec{b}$ はベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ の内積を表すものとする。

$$ \vec{d}=\vec{b}-\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\vec{a},\quad \vec{e}=\vec{c}-\frac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{|\vec{c}|^2}\vec{a}-\frac{\vec{d}\cdot\vec{c}}{|\vec{d}|^2}\vec{d} $$

(1−1) $\vec{a}\cdot\vec{d}$ の値を求めよ。

(1−2) $\vec{e}\cdot\vec{d}$ の値を求めよ。

(2) 複素数 $\alpha=1+i$，$\beta=3-7i$，$\gamma=-1-2i$ を表す複素数平面上の点をそれぞれ A，B，C とする。平行四辺形 ABCD の頂点 D を表す複素数を求めよ。ここで，i は虚数単位を表すものとする。

(3) 次のような数列がある。

1，11，111，1111，11111，……

(3−1) この数列の第 k 項を求めよ。

(3−2) この数列の初項から第 n 項までの和を n の式で表せ。

(1) (1−1) $\vec{d}=\vec{b}-\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}$ より，

$$ \vec{a}\cdot\vec{d}=\vec{a}\cdot\left(\vec{b}-\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}\right)=\vec{a}\cdot\vec{b}-\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\cdot|\vec{a}|^2=0 $$

(1−2) $\vec{e}=\vec{c}-\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{|\vec{c}|^2}\vec{a}-\dfrac{\vec{d}\cdot\vec{c}}{|\vec{d}|^2}\vec{d}$ より，

$$ \vec{e}\cdot\vec{d}=\left(\vec{c}-\frac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{|\vec{c}|^2}\vec{a}-\frac{\vec{d}\cdot\vec{c}}{|\vec{d}|^2}\vec{d}\right)\cdot\vec{d}=\vec{c}\cdot\vec{d}-\frac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{|\vec{c}|^2}\cdot(\vec{a}\cdot\vec{d})-\frac{\vec{d}\cdot\vec{c}}{|\vec{d}|^2}\cdot|\vec{d}|^2=0 $$

(2) 平行四辺形 ABCD から，

$$ \overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{DC}} \iff \overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}} $$

よって，点 D を表す複素数を w とすると，

$$ w=\alpha-\beta+\gamma=-3+6i $$

(3) (3−1)

$$ a_k=111\cdots11=1+10+10^2+\cdots+10^{k-2}+10^{k-1}=\frac{1\cdot(10^k-1)}{10-1}=\frac{1}{9}(10^k-1) $$

(3−2)

$$ \sum_{k=1}^{n} a_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{9}(10^k-1)=\frac{10^{n+1}-9n-10}{81} $$

$\boxed{3}$ 次の各問に答えよ。ただし，答は結果のみを解答欄に記入せよ。

(1) 2016 の正の約数について次の問に答えよ。

(1−1) 約数は全部でいくつあるか。

(1−2) (1−1) の約数の総和を求めよ。

(2) $a>0,\ b>0$ のとき，$\log_3\left(a+\dfrac{3}{b}\right)+\log_3\left(b+\dfrac{3}{a}\right)$ の最小値を求めよ。

(3) $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{2}{3}$ のとき，$\cos^3\theta-\sin^3\theta$ の値を求めよ。ただし，$-\dfrac{\pi}{2}<\theta<0$ とする。

(4) 次の定積分の値を求めよ。

$$\int_0^{\pi}|\sin 3x+\sin 2x+\sin x|\,dx$$

(1)(1−1) $2016=2^5\cdot3^2\cdot7$ とかけるから，$(1+5)\cdot(1+2)\cdot(1+1)=36$ 個

(1−2) $(1+2+2^2+\cdots\cdots+2^5)\cdot(1+3+3^2)\cdot(1+7)=6552$

(2) $\log_3\left(a+\dfrac{3}{b}\right)\left(b+\dfrac{3}{a}\right)=\log_3\left(ab+\dfrac{9}{ab}+6\right)\geqq\log_3\left(2\sqrt{ab\cdot\dfrac{9}{ab}}+6\right)=1+2\log_3 2$

(3) $(\sin\theta+\cos\theta)^2=\left(\dfrac{2}{3}\right)^2$ より，$1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{4}{9}$ $\quad\therefore\ \sin\theta\cos\theta=-\dfrac{5}{18}$

よって $\quad(\cos\theta-\sin\theta)^2=1-2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{14}{9}$

$-\dfrac{\pi}{2}<\theta<0$ より $\cos\theta>0$ かつ $\sin\theta<0$ だから $\quad\cos\theta-\sin\theta>0$

$\therefore\ \cos\theta-\sin\theta=\dfrac{\sqrt{14}}{3}$

$$\cos^3\theta-\sin^3\theta=(\cos\theta-\sin\theta)(\cos^2\theta+\cos\theta\sin\theta+\sin^2\theta)=\frac{\sqrt{14}}{3}\left(1-\frac{5}{18}\right)=\frac{13\sqrt{14}}{54}$$

(4) $\sin 3x+\sin x+\sin 2x=2\sin 2x\cos x+\sin 2x=\sin 2x(2\cos x+1)$

とかけるから，$\sin 3x+\sin 2x+\sin x$ の正負は

$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ で正，$\dfrac{\pi}{2}\leqq x\leqq\dfrac{2}{3}\pi$ で負，$\dfrac{2}{3}\pi\leqq x\leqq\pi$ で正となる.

$F(x)=-\dfrac{1}{3}\cos 3x-\dfrac{1}{2}\cos 2x-\cos x$ とおくと

$$\int_0^{\pi}|\sin 3x+\sin 2x+\sin x|dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin 3x+\sin 2x+\sin x)dx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2}{3}\pi}(\sin 3x+\sin 2x+\sin x)dx$$
$$+\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}(\sin 3x+\sin 2x+\sin x)dx$$
$$=F\left(\frac{\pi}{2}\right)-F(0)-\left\{F\left(\frac{2}{3}\pi\right)-F\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\}+F(\pi)-F\left(\frac{2}{3}\pi\right)$$
$$=2F\left(\frac{\pi}{2}\right)-2F\left(\frac{2}{3}\pi\right)-F(0)+F(\pi)$$

$F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$，$F\left(\dfrac{2}{3}\pi\right)=\dfrac{5}{12}$，$F(0)=-\dfrac{11}{6}$，$F(\pi)=\dfrac{5}{6}$ を代入して

$$\int_0^{\pi}|\sin 3x+\sin 2x+\sin x|dx=2\cdot\frac{1}{2}-2\cdot\frac{5}{12}-\left(-\frac{11}{6}\right)+\frac{5}{6}=\frac{17}{6}$$

的中！

ＹＭＳ直前講習　昭和Ⅰテキストより

$\boxed{2}$ 数学 Ⅱ・B 宿題

次の連立方程式を解け．ただし，$0°<x<360°$，$0°<y<360°$ とする．

$$\begin{cases}\cos x=\cos(x+y)\\ \cos y=\cos(x+y)\end{cases}$$

$\boxed{4}$ 次の各問に答えよ。ただし，(1) に関しては，答は結果のみを解答欄に記入せよ。

(1) 次の問に答えよ。

(1−1) $0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ とする。このとき，2 曲線 $y=\sin x$，$y=\cos x$ と直線 $y=1$ とで囲まれた部分の面積 S を求めよ。

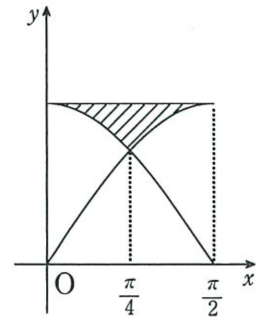
(1−2) (1−1) の図形を直線 $y=1$ のまわりに回転させてできる立体の体積 V を求めよ。

(2) 放物線 $y=x^2-2$ 上を動く点 P がある。動点 P と点(1, 0) との距離が最小になるときの点 P の座標を求めよ。

(1)

(1−1) 図形の対称性を考えて

$$2\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\cos x)dx=2\Big[x-\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\pi}{2}-\sqrt{2}$$



(1−2) 図形の対称性を考えて

$$2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\pi(1-\cos x)^2dx=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos^2 x-2\cos x+1)dx$$
$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{2}\cos 2x-2\cos x+\frac{3}{2}\right)dx$$
$$=2\pi\left[\frac{1}{4}\sin 2x-2\sin x+\frac{3}{2}x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\left(\frac{3}{4}\pi-2\sqrt{2}+\frac{1}{2}\right)\pi$$

(2) $P(t,\ t^2-2)$ とおくと，(1, 0) との距離 d について

$d^2=(t-1)^2+(t^2-2)^2=t^4-3t^2-2t+5=f(t)$ とおくと

$f'(t)=4t^3-6t-2=2(2t^3-3t-1)=2(t+1)(2t^2-2t-1)$

t	$\cdots$	-1	$\cdots$	$\frac{1-\sqrt{3}}{2}$	$\cdots$	$\frac{1+\sqrt{3}}{2}$	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	↘		↗		↘		↗

$f(-1)=5$，$f\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)=\dfrac{11-6\sqrt{3}}{4}$ より，$t=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ のときが最小となる.

このとき，$2t^2-2t-1=0$ より $t^2=t+\dfrac{1}{2}$ が成り立つことに注意すると

P の y 座標は $\quad t^2-2=t-\dfrac{3}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-1\quad\quad\therefore\ P\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}-1\right)$

的中！

ＹＭＳ直前講習　昭和Ⅰテキストより

$\boxed{4}$ 数学 Ⅲ 宿題

2 つの曲線 $C_1:y=2\cos x$，$C_2:y=k-\sin 2x$ が $0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で共有点 P をもち，その点で共通の接線をもつとする．ただし，k は定数とする．

(1) 共有点 P の x 座標を求めよ．

(2) 定数 k の値を求めよ．

(3) $0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で，y 軸と C_1, C_2 が囲む図形の面積を求めよ．

【数学（講評）】

$\boxed{1}$
独立試行の確率に関する問い。最後の極限の計算がやや面倒だが，標準的な内容である。

$\boxed{2}$
(1)は見た目がごついので敬遠した生徒も多いかもしれない。だが(1-1)は図を描けばすぐに直角に交わることはわかるし，(1-2)はそのまま内積を計算すればよい。(2)は複素数平面からの出題。対角線が中点で交わることを利用すると楽。(3)は等比数列の和の問題。(1)を除けば極めて定型的である。

$\boxed{3}$
(1)は落ち着いて公式を用いればよい。(2)は相加相乗平均に帰着させる。(3)は符号に注意して計算しよう。(4)は絶対値の中の符号を調べるが，3 倍角で展開すると苦労することになる。和積でどんどんまとめていくことに気付けるかがポイントである。

$\boxed{4}$
(1)は図を描いて落ち着いて計算すればよい。対称性を利用すると多少計算が楽になる。(2)はいろいろ解き方が考えられるが，どの解き方も大差はないので，自分の慣れ親しんだ道具を使うのがいいだろう。

例年通り定型的な問題が多い。あせらず計算すれば満点も狙える内容だが，実際は 7 割くらいがボーダーである。

「天国への数学」冬期特別講座

大的中！

$\boxed{1}$ (3) の記述であるが、e の定義の 5 つの顔をしっかりやっていたので、何とかなった人もいたと思う。

1

287　e の定義の確認

(i) $\lim_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$　(ii) $\lim_{x \to \pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$

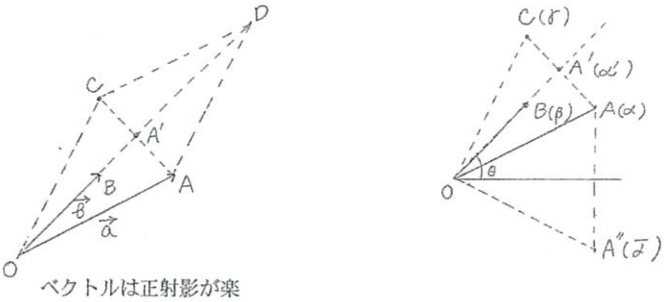
(iii) $\lim_{x \to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = 1$　(iv) $\lim_{x \to 0}\frac{e^{x}-1}{x} = 1$

(v) $\lim_{x \to 0}\frac{a^{x}-1}{x} = \log a$

$\boxed{2}$ (1) これで瞬殺

2

240　ベクトルと複素数・対称移動と正射影



ベクトルは正射影が楽

↓

それから対称移動

複素数はその逆

A を直線 OB に対称に移し、それを C とする。

A を直線 OB に正射影して、それを A' とする。

	ベクトル	複素数
対称移動	$\vec{C} = 2\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\lvert\vec{b}\rvert^{2}}\vec{b} - \vec{a}$	$\gamma = \frac{\beta}{\bar{\beta}}\bar{\alpha}$
正射影	$\overrightarrow{OA'} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\lvert\vec{b}\rvert^{2}}\vec{b}$	$\alpha' = \frac{\alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta}{2\bar{\beta}}$

$\boxed{3}$、$\boxed{4}$ は同一問題

さらに 2016 素因数分解は、何度もやっている。

YMS生へ
基本的に大切なものは、
全て
直前天国数学に
入っている！
天国で[illegible]も大丈夫！

3

060　場合の数のまとめ

1:場合の数

・2 個のさいころを投げるとき、目の和が奇数

　(ア) さいころを区別する　**3・3・2!**

　(イ) さいころを区別しない　**3・3**

・720 の正の約数には 1 と 720 を含むとき

　(ア) 720 の正の約数の個数　**30**

　(イ) 720 の全ての正の約数の総和　**2418**

4

174

$y = x^2$ 上にあって、点 $A(6,3)$ から最も近い点 B を求めよ。