【数学（解答）】

$\boxed{\mathrm{I}}$

$\boxed{}$ に適する解答をマークせよ。ただし，同一問題で同じ記号の $\boxed{}$ がある場合は同一の値がはいる。

(1) 正6面体の面に色を塗ることを考える。ただし，いずれの場合もすべての色が用いられ，回転で一致する塗り方は区別しない。

赤と青の2色を使った塗り方は，

1つの色を1面に，もう1つの色を5面に塗る場合が ア $\boxed{2}$ 通り，

1つの色を2面に，もう1つの色を4面に塗る場合が イ $\boxed{4}$ 通り，

2つの色をそれぞれ3面ずつに塗る場合が ウ $\boxed{2}$ 通り，

計 エ $\boxed{8}$ 通りある。

赤，青と黄の3色を使った塗り方は，

3つの色をそれぞれ1面－1面－4面に塗る場合が オ $\boxed{6}$ 通り，

3つの色をそれぞれ1面－2面－3面に塗る場合が カキ $\boxed{18}$ 通り，

3つの色を2面ずつに塗る場合が ク $\boxed{5}$ 通り，

計 ケコ $\boxed{29}$ 通りある。

(2) 下図（略）のように周の長さ l の正五角形ABCDEがあり，点Dから長さ l の伸び縮みしない糸が反時計方向に巻き付けられている。この糸をたるまないように巻きほどき，糸の端FがCDの延長線上に来るまで巻きほどく。動点Fは，はじめCを中心に，半径 $\dfrac{{}^{ア}\boxed{1}}{{}^{イ}\boxed{5}}l$，中心角 $\dfrac{{}^{ウ}\boxed{2}}{{}^{エ}\boxed{5}}\pi$ の弧を描く。中心を変え，半径を変えながら巻きほどいていくが，それぞれの弧の中心角は $\dfrac{{}^{ウ}\boxed{2}}{{}^{エ}\boxed{5}}\pi$ と変化しない。このとき，動点Fの動く距離は $\dfrac{{}^{オ}\boxed{6}}{{}^{カ}\boxed{5}}l\pi$ であり，糸の掃く面積は $\dfrac{{}^{キク}\boxed{11}}{{}^{ケコ}\boxed{25}}l^2\pi$ である。同様のことを正 n 角形で行い，糸の端の移動距離を $\dfrac{1}{n}(an+b)l\pi$ とし，糸の掃く面積を $\dfrac{1}{n^2}(cn^2+dn+e)l^2\pi$ とすると，$a={}^{サ}\boxed{1}$，$c=\dfrac{{}^{シ}\boxed{1}}{{}^{ス}\boxed{3}}$ である。周の長さ l の円に巻き付けられた糸を巻きほどくときの曲線（伸展曲線）については，上式でそれぞれ n の極限をとることにより求まる。糸の端の移動距離を $fl\pi$，糸の掃く面積を $gl^2\pi$ とすれば $f={}^{セ}\boxed{1}$，$g=\dfrac{{}^{ソ}\boxed{1}}{{}^{タ}\boxed{3}}$ となることがわかる。

(3) $\boxed{ケ}$ はA群，$\boxed{シ}$ はB群より選択せよ。

$y=f(x)=x^3-x$ は，$x=\dfrac{\pm\sqrt{{}^{ア}\boxed{3}}}{{}^{イ}\boxed{3}}$ で極値 $\dfrac{\mp{}^{ウ}\boxed{2}\sqrt{{}^{エ}\boxed{3}}}{{}^{オ}\boxed{9}}$ を持つ。また，この2つの値の極値の間の任意の t に対して，この関数のグラフは直線 $y=t$ と3つの交点を持つ。この3つの交点の x 座標を小さい順に $p(t)<q(t)<r(t)$ とする。$p(t)$，$q(t)$，$r(t)$ は t によらず，$p(t)+q(t)+r(t)={}^{カ}\boxed{0}$，$p(t)q(t)+q(t)r(t)+r(t)p(t)={}^{キク}\boxed{-1}$ を満たす。このとき $\int_{p(t)}^{r(t)}|f(x)-t|dx$ は t の関数となる。これを $G(t)$ とおいたとき，導関数 $G'(t)$ について考えよう。t が微小量変化したときの様子（下図略）より $G'(t)={}^{ケ}\boxed{d}$ となり，$p(t)$，$q(t)$，$r(t)$ の関係を考慮すると $G'(t)={}^{コサ}\boxed{-3}\ {}^{シ}\boxed{b}$ となる。

以上の関係より，$G'(t)=1$ となるのは $t=\dfrac{{}^{ス}\boxed{8}}{{}^{セソ}\boxed{27}}$ のときである。

選択肢A

a) $(r(t)-q(t))+(q(t)-p(t))$

b) $(r(t)-q(t))^2+(q(t)-p(t))^2$

c) $(r(t)^2-q(t)^2)+(q(t)^2-p(t)^2)$

d) $(r(t)-q(t))-(q(t)-p(t))$

e) $(r(t)-q(t))^2-(q(t)-p(t))^2$

f) $(r(t)^2-q(t)^2)-(q(t)^2-p(t)^2)$

選択肢B

a) $p(t)$　b) $q(t)$　c) $r(t)$　d) $p(t)^2$　e) $q(t)^2$　f) $r(t)^2$

(4) 4次関数 $f(x)=ax^4+bx^2+c$ がある。ここで x の区間 $[3,\ 6]$ における関数 $f(x-t)$ の最大値を $g(t)$，最小値を $h(t)$ とおく。

$g(t)$ は $\alpha\leqq t\leqq\beta$ で $g(t)=\dfrac{3}{2}$ となり，

$t<\alpha$ または $t>\beta$ で $g(t)>\dfrac{3}{2}$ であり，

$h(t)$ は $\dfrac{3}{2}\leqq t\leqq\dfrac{15}{2}$ で $h(t)=\dfrac{-57}{16}$ で，

$t<\dfrac{3}{2}$ または $t>\dfrac{15}{2}$ で $h(t)>\dfrac{-57}{16}$ であった。

このとき $a={}^{ア}\boxed{1}$，$b=\dfrac{{}^{イウ}\boxed{-9}}{{}^{エ}\boxed{2}}$，$c=\dfrac{{}^{オ}\boxed{3}}{{}^{カ}\boxed{2}}$，

$\alpha={}^{キ}\boxed{6}-\dfrac{{}^{ク}\boxed{3}\sqrt{{}^{ケ}\boxed{2}}}{{}^{コ}\boxed{2}}$，

$b={}^{サ}\boxed{3}+\dfrac{{}^{シ}\boxed{3}\sqrt{{}^{ス}\boxed{2}}}{{}^{セ}\boxed{2}}$

である。

Ⅱ

$\boxed{}$ に適する解答をマークせよ。

正二十面体の体積を求めてみよう。

正二十面体の各面は正三角形であり，1つの頂点には5つの正三角形が集まっている。

まず，Hを中心とする円に内接する正五角形ABCDEについて考える。

ACとBEの交点をIとすると，△IABと△BCAを比較することにより，

$\mathrm{AC}=\dfrac{{}^{\text{ア}}\boxed{1}+\sqrt{{}^{\text{イ}}\boxed{5}}}{{}^{\text{ウ}}\boxed{2}}\mathrm{AB}$ となり，$\cos\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{{}^{\text{エ}}\boxed{1}+\sqrt{{}^{\text{オ}}\boxed{5}}}{{}^{\text{カ}}\boxed{4}}$ となる

ことがわかる。これを用いて $\mathrm{AB}=\dfrac{\sqrt{{}^{\text{キク}}\boxed{10}-{}^{\text{ケ}}\boxed{2}\sqrt{{}^{\text{コ}}\boxed{5}}}}{{}^{\text{サ}}\boxed{2}}\mathrm{AH}$ が求まる。

次に，Hを通り円Hを含む平面に垂直な直線上にFA＝ABとなるようにFをとると，

$\mathrm{FH}=\dfrac{{}^{\text{シス}}\boxed{-1}+\sqrt{{}^{\text{セ}}\boxed{5}}}{{}^{\text{ソ}}\boxed{2}}\mathrm{AH}$ である。さらにFHの延長上にFO＝AOとなるよう

にOをとると $\mathrm{HO}=\dfrac{{}^{\text{タ}}\boxed{1}}{{}^{\text{チ}}\boxed{2}}\mathrm{AH}$ であり，$\mathrm{FO}=\dfrac{\sqrt{{}^{\text{ツ}}\boxed{5}}}{{}^{\text{テ}}\boxed{2}}\mathrm{AH}$ となる。

△FABの重心をGとすると，

$\mathrm{FG}=\dfrac{\sqrt{{}^{\text{ト}}\boxed{3}}}{{}^{\text{ナ}}\boxed{3}}\mathrm{AB}=\dfrac{\sqrt{{}^{\text{ニヌ}}\boxed{30}-{}^{\text{ネ}}\boxed{6}\sqrt{{}^{\text{ノ}}\boxed{5}}}}{{}^{\text{ハ}}\boxed{6}}\mathrm{AH}$ となる。

このとき，正五角錐ABCDEFはOを中心とする球に内接する正二十面体の一部である。

$\mathrm{GO}=\dfrac{{}^{\text{ヒ}}\boxed{3}\sqrt{{}^{\text{フ}}\boxed{3}}+\sqrt{{}^{\text{ヘホ}}\boxed{15}}}{{}^{\text{マミ}}\boxed{12}}\mathrm{AB}$ となり，

正二十面体の表面積は ${}^{\text{ム}}\boxed{5}\sqrt{{}^{\text{メ}}\boxed{3}}\mathrm{AB}^2$ となるので，体積は

$\dfrac{{}^{\text{モヤ}}\boxed{15}+{}^{\text{ユ}}\boxed{5}\sqrt{{}^{\text{ヨ}}\boxed{5}}}{{}^{\text{ラリ}}\boxed{12}}\mathrm{AB}^3$ とあらわすことができる。

Ⅲ

次の問いに答えよ。

(1) 任意の実数 x，y に対して，次の不等式を証明せよ。

$$|x+y|\leqq|x|+|y|$$

(2) 三角形OAQに対して，辺OP上に点R，辺OQ上に点Sをとる。このとき，つぎの不等式を証明せよ。

$$\mathrm{PQ}+\mathrm{RS}\leqq\mathrm{PS}+\mathrm{QR}$$

(3) 平面上の任意の4点A，B，C，Dについて，つぎの不等式を証明せよ。

$$\mathrm{AB}+\mathrm{CD}\leqq\mathrm{AC}+\mathrm{BD}+\mathrm{AD}+\mathrm{BC}$$

(4) (3)の不等式で等号が成り立つのはどのような場合か述べよ。

解答

(1) $(|x|+|y|)^2-(|x+y|)^2=2(|xy|-xy)\geqq0$

等号成立は x，y が同符号のとき．

$|x+y|$，$|x|+|y|$ はともに正だから，題意は成立する．

(2) PSとRQの交点をTとおくと，PQ≦PT＋TQ，RS≦RT＋TS

これらの辺々を加えると，PT＋TS＝PS，RT＋TQ＝RQより題意が成立する．

(3) AB≦BC＋AC，AB≦AD＋BD，CD≦BC＋BD，CD≦AC＋AD

だから，これらの辺々を加えると題意が成立する．

(4) AB≦BC＋AC，AB≦AD＋BD，CD≦BC＋BD，CD≦AC＋ADの等号が同時に成立するときを考える．

AB≦BC＋ACが成り立つのは，3点A，B，Cが同一直線上にあり，A，C，Bの順に並ぶときである．同様に他の不等式についても等号が成り立つときを考えると，

4点が一致する場合に限られる．

【　講評　】

例年同様に大問で3題．小問集合が1題，記述式が1題であった．小問集合も計算量が多く，70分という制限の中で出来る問題を正確に解く力が試された．

Ⅰはどれも解ききりたい．時間との勝負だっただろう．

Ⅱは誘導に乗って求めていけば易しいが，空間図形の考察が苦手な人には厳しかっただろう．

Ⅲは三角不等式の利用．いくつか不等式を立てて，組み合わせを考えればよい．

1次通過は6割強が目安になるだろう．